DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 5 settembre 2022

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.
I compiti corretti saranno a disposizione mercoledì 6 giugno, alle 12.30, al 1° piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \qquad\qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r\operatorname{sen}\theta\cos\phi \qquad y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

A. Calcolare

$$\int \frac{\log u}{(u+1)^3}\,du$$

(Indicazione: come primo passo, conviene usare l'integrazione per parti.)

B. Sia $\mathcal{A}$ la zona nel piano determinata da:

$$x^2 \leq y \leq x$$

Fare un disegno e usare le coordinate polari per calcolare

$$\iint_{\mathcal{A}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA$$

(Indicazioni: sarà difficile calcolare i limiti d'integrazione per θ se non si fa bene il disegno.)

C. Siano $R > 0$ e $A > 0$ due parametri fissi e sia $\mathcal{E}$ l'emisfera definita da

$$z \geq 0 \qquad\qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

Usare le coordinate sferiche e calcolare

$$\iiint_{\mathcal{E}} z^A\, dV$$

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema:

$$\begin{array}{rrrrl} a & +3b & +6c & +10d & = 1 \\ 3a & +6b & +10c & +15d & = 4 \\ 6a & +10b & +15c & +21d & = 9 \\ 10a & +15b & +21c & +28d & = 16 \end{array}$$

(Indicazione: se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, il solo denominatore che appare è "3".)

$\boxed{A}$ $\displaystyle\int \frac{\log u}{(u+1)^3}\,du$

$$= \log u \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(u+1)^2}\right) - \int \frac{1}{u}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(u+1)^2}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\log u}{(u+1)^2} + \int \frac{1}{u}\frac{1}{(u+1)^2}\,du\right)$$

$$\downarrow\ \frac{1}{u}\frac{1}{(u+1)^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{(u+1)} + \frac{C}{(u+1)^2}$$

$$1 = A(u+1)^2 + Bu(u+1) + Cu$$

$$u = 0 \rightsquigarrow 1 = A(0+1)^2 + 0 + 0$$

$$\rightsquigarrow A = 1$$

$$u = -1 \rightsquigarrow 1 = 0 + 0 + C(-1) \rightsquigarrow C = -1$$

2 / 9

$$1 = (u+1)^2 + Bu(u+1) - u$$

$$\begin{aligned} 1 = &\ (u^2 + 2u + 1) \\ &+ B(u^2 + u) \\ &- (u) \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \quad 1 = 1$$
$$0 = 2 + B - 1$$
$$0 = 1 + B$$

$$\rightsquigarrow \quad B = -1$$

$$\int \frac{1}{u} \frac{1}{(u+1)^2} du = \int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} du$$

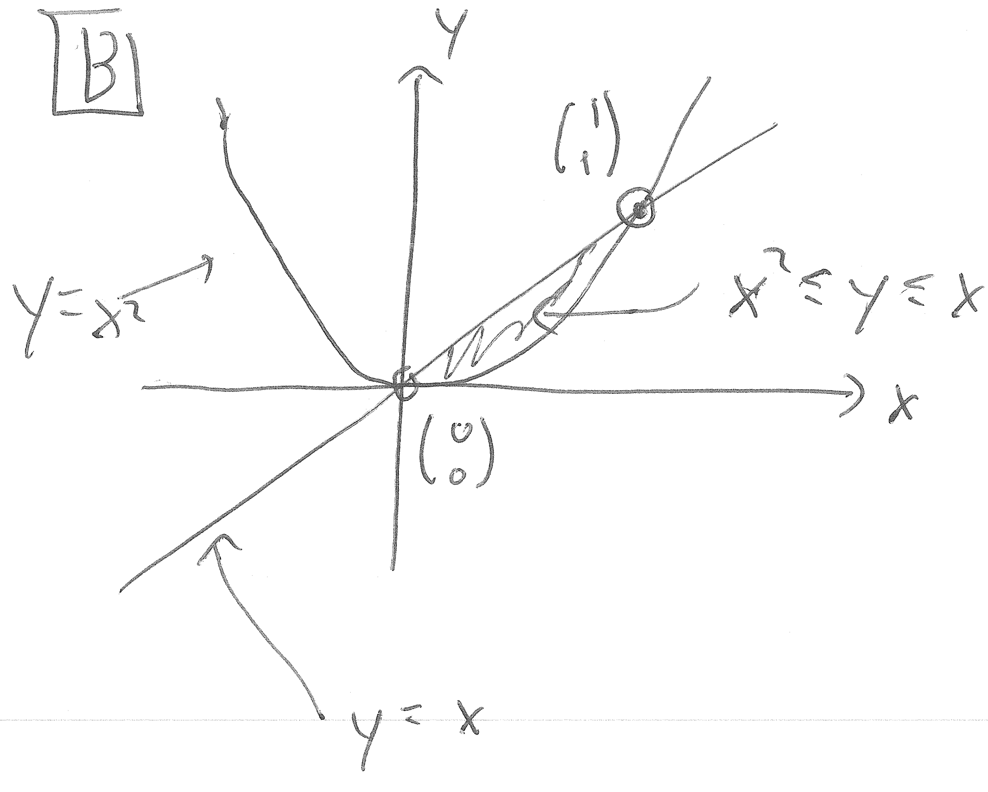
$$= \boxed{\log u - \log(u+1) + \frac{1}{u+1}}$$

3/9

$$\int \frac{\log u}{(u+1)^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\log u}{(u+1)^2} + \log u - \log(u+1) + \frac{1}{u+1} \right)$$

$\boxed{B}$



$$x^2 \le y \le x$$

$$\leadsto r^2 \cos^2\theta \le r \operatorname{sen}\theta \le r\cos\theta$$

4/9

$$\rightsquigarrow \quad r \le \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} \quad e \quad \operatorname{sen}\theta \le \cos\theta$$

$$\rightsquigarrow \quad r \le \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} \quad e \quad \operatorname{tg}\theta \le 1$$

$$\iint_{A} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA$$

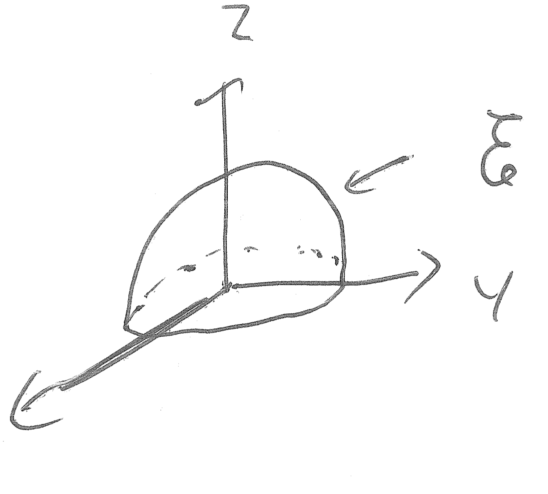
$$= \int_{\theta=0}^{\pi/4} \left(\int_{r=0}^{\operatorname{sen}\theta/\cos^2\theta} \frac{1}{r} \cdot r\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = \left. \frac{1}{\cos\theta} \right]_{\theta=0}^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}/2} - \frac{1}{1} = \sqrt{2}-1$$

5/9

C



$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$0 \leq r$

$z \geq 0 \rightarrow r\cos\theta \geq 0 \rightsquigarrow \cos\theta \geq 0$

$\rightsquigarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \rightsquigarrow r^2 \leq R^2 \rightsquigarrow r \leq R$

$$\iiint_E z^A \, dV$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{R} (r\cos\theta)^A r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} (\cos\theta)^A \operatorname{sen}\theta \left(\int_{r=0}^{R} r^{2+A} \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} (\cos\theta)^A \operatorname{sen}\theta \right) \frac{R^{3+A}}{3+A}$$

$$= \frac{2\pi R^{3+A}}{3+A} \left(-\frac{(\cos\theta)^{A+1}}{A+1} \right)_{\theta=0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{2\pi R^{A+3}}{A+3} \left(0 + \frac{1}{A+1} \right)$$

$$= \frac{2\pi R^{A+3}}{(A+1)(A+3)}$$

7 / 9

a	b	c	d	=
1	3	6	10	1
3	6	10	15	4
6	10	15	21	9
10	15	21	28	16

$E2 \leftarrow E2 - 3E1$
$E3 \leftarrow E3 - 6E1$
$\longrightarrow$
$E4 \leftarrow E4 - 10E1$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & -3 & -8 & -15 & 1 \\ 0 & -8 & -21 & -39 & 3 \\ 0 & -15 & -39 & -72 & 6 \end{array}$$

$E2 \leftarrow -\frac{1}{3}E2$
$\longrightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 8/3 & 5 & -1/3 \\ 0 & -8 & -21 & -39 & 3 \\ 0 & -15 & -39 & -72 & 6 \end{array}$$

$E1 \leftarrow E1 - 3E2$
$\longrightarrow$
$E3 \leftarrow E3 + 8E2$
$E4 \leftarrow E4 + 15E2$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 8/3 & 5 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

$E3 \leftarrow 3E3$
$\longrightarrow$

8/9

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & -5 & +2 \\ 0 & 1 & 8/3 & 5 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \xrightarrow[E4 \leftarrow E4 - E3]{\substack{E1 \leftarrow E1 + 2E3 \\ E2 \leftarrow E2 - 8/3\, E3}}$$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & = \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} a + d = 4 \\ b - 3d = -3 \\ c + 3d = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = -d + 4 \\ b = 3d - 3 \\ c = -3d + 1 \\ d = d \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d + 4 \\ 3d - 3 \\ -3d + 1 \\ d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Controllo:

$$a+3b+6c+10d = (-d+4) + 3(3d-3) + 6(-3d+1) + 10(d) = 0d+1 = 1$$

(v)

$$3a+6b+10c+15d = 3(-d+4) + 6(3d-3) + 10(-3d+1) + 15(d) = 0d+4 = 4$$

(v)

$$6a+10b+15c+21d = 6(-d+4) + 10(3d-3) + 15(-3d+1) + 21(d) = 0d+9 = 9$$

(v)

$$10a+15b+21c+28d = 10(-d+4) + 15(3d-3) + 21(-3d+1) + 28(d) = 0d+16 = 16$$

(v)