

DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 24 febbraio 2022

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici*. È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

I compiti corretti saranno a disposizione lunedì 13 settembre, alle 12.30, al 1° piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \\ dx \, dy \, dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

A. Usare la sostituzione $u = e^t$ e calcolare

$$\int \frac{1}{(e^t + 2)(e^t + 3)} dt$$

B. Sia A e k due parametri fissi con $A > 0$. Sia $\mathcal{C}$ il cono definito da:

$$0 \leq z \leq A \qquad x^2 + y^2 \leq z^2$$

1. Usare le coordinate cilindriche e calcolare $\iiint_{\mathcal{C}} e^{kz} dV$.
2. Calcolare il limite della risposta quando $k \rightarrow 0$.

C. Sia $R > 0$ un parametro fisso e sia $\mathcal{F}$ il volume definito da:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \qquad |x| \leq y$$

Prima, disegnare la zona nel piano- (x, y) che corrisponde alle disuguaglianza $|x| \leq y$. Poi, usare le coordinate sferiche per calcolare la media di y su $\mathcal{F}$.

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{array}{rrrrr} A & +4B & +10C & +35D & = 56 \\ & B & +4C & +10D & = 35 \\ & & C & +4D & = 10 \\ 4A & +10B & +35C & +56D & = 84 \end{array}$$

(Il solo denominatore che viene fuori è 5.)

1/10

A

$$u = e^t \quad du = e^t dt$$

$$\int \frac{1}{(e^t+2)(e^t+3)} dt = \int \frac{1}{e^t(e^t+2)(e^t+3)} e^t dt$$

$$= \int \frac{1}{u(u+2)(u+3)} du$$

$$\frac{1}{u(u+2)(u+3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+2} + \frac{C}{u+3}$$

$$1 = A(u+2)(u+3) + Bu(u+3) + Cu(u+2)$$

$$u=0 \rightsquigarrow 1 = A(0+2)(0+3) + 0 + 0$$

$$= 6A \rightsquigarrow A = 1/6$$

$$u=-2 \rightsquigarrow 1 = 0 + B(-2)(-2+3) + 0$$

$$= -2B \rightsquigarrow B = -1/2$$

$$\boxed{2/10}$$

$$u = -3 \leadsto 1 = 0 + 0 + C(-3)(-3+2) \\ = 3C \leadsto C = 1/3$$

$$\int \frac{1}{(e^t+2)(e^t+3)} dt = \int \frac{1}{6} \frac{1}{u} - \frac{1}{2} \frac{1}{u+2} + \frac{1}{3} \frac{1}{u+3} du$$

$$= \frac{1}{6} \log(u) - \frac{1}{2} \log(u+2) + \frac{1}{3} \log(u+3)$$

$$= \frac{1}{6} \log(e^t) - \frac{1}{2} \log(e^t+2) + \frac{1}{3} \log(e^t+3)$$

$$= \left(\frac{1}{6} t - \frac{1}{2} \log(e^t+2) + \frac{1}{3} \log(e^t+3) \right)$$

$$\boxed{B} \text{ (1) } x^2 + y^2 \leq z^2 \leadsto (m \cos \theta)^2 + (m \sin \theta)^2 \leq z^2 \\ \leadsto m^2 \leq z^2 \leadsto m \leq z$$

$$\iiint_{\mathbb{C}} e^{kz} dz \\ = \int_{z=0}^A \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{m=0}^z e^{kz} \cdot m \, dm \right) d\theta \right) dz$$

3/10

$$= \int_{z=0}^A \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{kz} \cdot \frac{z^2}{z} d\theta \right) dz$$

$$= \int_{z=0}^A 2\pi \cdot \frac{z^2}{z} e^{kz} dz = \pi \int_{z=0}^A z e^{kz} dz$$

$$= \pi \left(z^2 \frac{e^{kz}}{k} \right)_{z=0}^A - \int_{z=0}^A 2z \frac{e^{kz}}{k} dz$$

$$= \pi \left(A^2 \frac{e^{kA}}{k} - \frac{2}{k} \int_{z=0}^A z e^{kz} dz \right)$$

$$= \pi \left(A^2 \frac{e^{kA}}{k} - \frac{2}{k} \left(z \frac{e^{kz}}{k} - \int_{z=0}^A 1 \cdot \frac{e^{kz}}{k} dz \right) \right)$$

$$= \pi \left(\frac{A^2 e^{kA}}{k} - \frac{2A e^{kA}}{k^2} + \frac{2}{k^2} \int_{z=0}^A e^{kz} dz \right)$$

4/10

$$= \pi \left(\frac{A^2 e^{kA}}{k} - \frac{2A e^{kA}}{k^2} + \frac{2}{k^3} e^{kz} \right) \Big|_{z=0}^A$$

$$= \pi \left(\frac{A^2 e^{kA}}{k} - \frac{2A e^{kA}}{k^2} + \frac{2e^{kA}}{k^3} - \frac{2}{k^3} \right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{k^3} \left(k^2 A^2 e^{kA} - 2A k e^{kA} + 2e^{kA} - 2 \right) \right)$$

$$\textcircled{2} = \frac{\pi}{k^3} \left((2 - 2Ak + k^2 A^2) e^{kA} - 2 \right)$$

$$= \frac{\pi}{k^3} \left((2 - 2Ak + k^2 A^2) \left(1 + \frac{kA}{1} + \frac{k^2 A^2}{2} + \frac{k^3 A^3}{6} + \dots \right) - 2 \right)$$

dove $\dots$ ha termini con $k^4, k^5, \dots$

$$= \frac{\pi}{k^3} \left(\begin{array}{l} 2 + 2kA + k^2 A^2 + k^3 A^3/6 + \dots \\ - 2kA - 2k^2 A^2 - k^3 A^3 + \dots \\ + k^2 A^2 + k^3 A^3 + \dots \\ - 2 \end{array} \right)$$

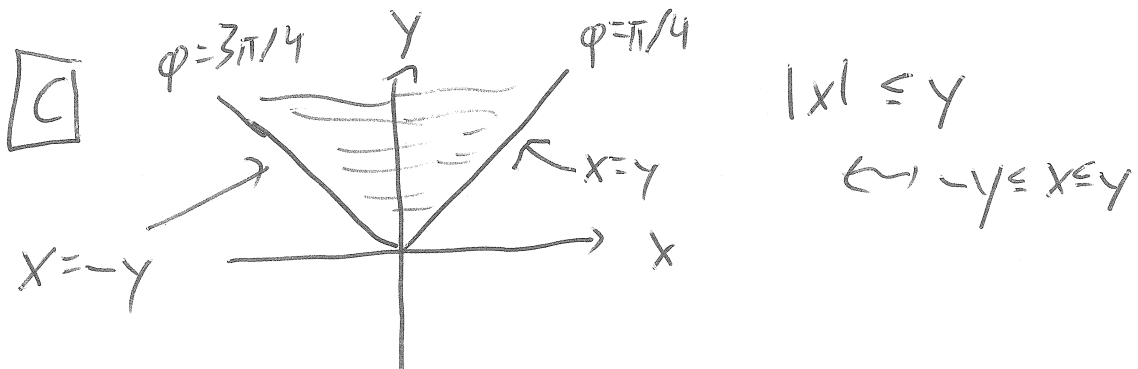
5/10

$$= \frac{\pi}{k^3} \left(k^3 A^3 / 3 + \dots \right)$$

$$= \frac{\pi A^3}{3} + \dots$$

dove $\dots$ ha termini con $k, k^2, \dots$

$$\text{e } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\pi A^3}{3} + \dots = \frac{\pi A^3}{3}$$



$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \Leftrightarrow M^2 \leq R^2 \Leftrightarrow M \leq R$$

$$|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$$

$$\Leftrightarrow -M \cos \theta \leq M \sin \theta$$

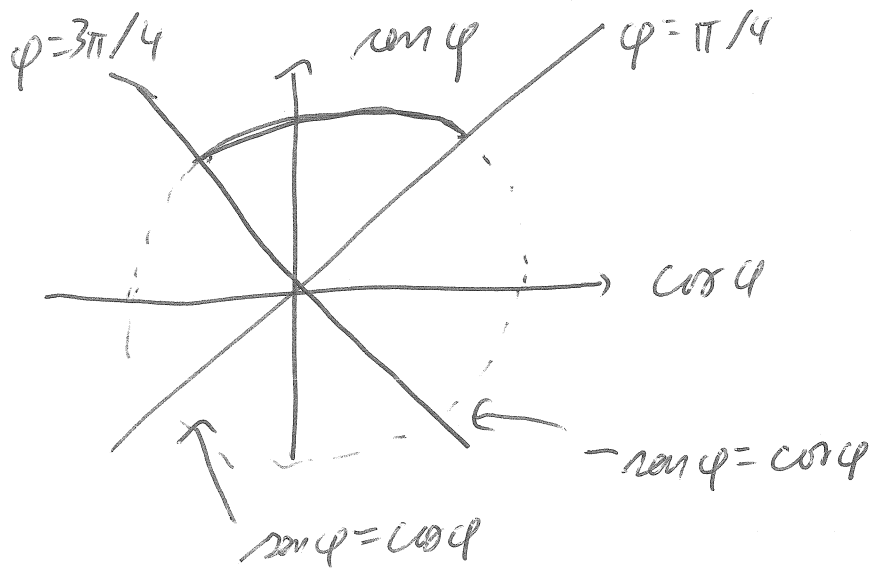
$$\Leftrightarrow M \cos \theta \leq M \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow M \cos \theta \leq M \sin \theta$$

6/10

$$\Leftrightarrow -\sin \varphi \leq \cos \varphi \leq \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow \pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4$$



$$\iiint_{\mathcal{F}} 1 \, dV$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^R 1 \cdot r^2 \sin \theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{R^3}{3} \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi$$

7/10

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4} \frac{R^3}{3} \cdot 2 \, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{\pi R^3}{3}$$

III) $\int \gamma \, dV$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^R (r \cos \theta \cos \varphi) r^2 \cos \theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4} \cos \varphi \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \left(\int_{r=0}^R r^3 \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4} \cos \varphi \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \cdot \frac{R^4}{4} \, d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4} \cos \varphi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4}{4} \, d\varphi$$

8/10

$$= \frac{\pi R^4}{8} (-\cos \varphi) \Big]_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= \frac{\pi R^4}{8} \left(-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi \sqrt{2} R^4}{8}$$

$$\bar{y} = \frac{\pi \sqrt{2} R^4 / 8}{\pi R^3 / 3} = \frac{3\sqrt{2}}{8} R$$

D	A	B	C	D	=
①	4	10	35	56	
0	1	4	10	35	
0	0	1	4	10	
4	10	35	56	84	

E4 ← E4-4E1

①	4	10	35	56
0	①	4	10	35
0	0	1	4	10
0	-6	-5	-84	-140

9/10

$$E1 \leftarrow E1 - 4E2$$

$$E4 \leftarrow E4 + 6E2$$

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 0 & -6 & -5 & -84 \\ 0 & \textcircled{1} & 4 & 10 & 35 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 19 & -24 & 70 \end{array}$$

$$E1 \leftarrow E1 + 6E3$$

$$E2 \leftarrow E2 - 4E3$$

$$E4 \leftarrow E4 - 19E3$$

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 19 & -24 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{-100} & -120 \end{array}$$

$$E4 \leftarrow \frac{-1}{100} E4$$

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 19 & -24 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 6/5 \end{array}$$

$$E1 \leftarrow E1 - 19E4$$

$$E2 \leftarrow E2 + 6E4$$

$$E3 \leftarrow E3 - 4E4$$

A	B	C	D =
$\textcircled{1}$	0	0	0 -234/5
0	$\textcircled{1}$	0	0 11/5
0	0	$\textcircled{1}$	0 26/5
0	0	0	$\textcircled{1}$ 6/5

10/10

$$A = -234/5$$

$$B = 11/5$$

$$C = 26/5$$

$$D = 6/5$$

Controller:

$$A + 4B + 10C + 35D = \frac{-234 + 44 + 260 + 210}{5}$$

$$= \frac{280}{5} = 56 \text{ (✓)}$$

$$B + 4C + 10D = \frac{11 + 104 + 60}{5}$$

$$= \frac{175}{5} = 35 \text{ (✓)}$$

$$C + 4D = \frac{26 + 24}{5} = \frac{50}{5} = 10 \text{ (✓)}$$

$$4A + 10B + 35C + 56D = \frac{-936 + 110 + 910 + 336}{5}$$

$$= \frac{420}{5} = 84 \text{ (✓)}$$