DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 4 febbraio 2022

- Non si copia da nessuno.
- Non si chiede aiuto a nessuno; non si ottiene aiuto da nessuno.
- Ogni compito deve essere accompagnato da una dichiarazione (dettagli sotto) e di una riproduzione della Carta d'Identità.
- La durata della prova è di 3 ore, più 1 ora per mettere insieme tutto e spedirmelo. Quindi, l'esame comincia alle 10.00 e accetterò consegne fino alle 14.00.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

In quanto l'esame è svolto in remoto, si può:

- far riferimento ad un libro di testo;
- far riferimento agli appunti;
- utilizzare una calcolatrice;
- oppure un calcolatore.

Per consegnare il compito, si deve scannerizzare il lavoro (se questo è possibile) o fotografarlo, e spedirmelo per posta elettronica. Inoltre:

- Come prima pagina o prime due pagine, si deve includere la carta d'identità, appositamente scannerizzata o fotografata.
- Dopodiché si deve riscrivere a mano e includere questa dichiarazione:

  > La sottoscritta/il sottoscritto ______________ dichiara che il lavoro qui consegnato è il suo lavoro, che non ha copiato da nessuno, e che non ha né chiesto né ottenuto aiuto da nessuno.

  con tanto di *firma, data, e luogo.*
- Ogni pagina deve avere un numero di pagina sotto e una *firma* di lato.
- Per favore, mettete le soluzioni in ordine: prima la soluzione dell'Esercizio A, poi la soluzione dell'Esercizio B, ecc.
- Se si spedisce il compito come risposta al messaggio del docente, stia attento a rispondere *solo al docente*, non a tutti.

Alcune osservazioni:

- Per essere sufficiente, un compito deve avere buone soluzioni ad almeno 2 dei 4 esercizi, di cui almeno uno deve essere Esercizio B o Esercizio C.
- Se qualcuno vuol far valere il lavoro svolto su un Esercizio A e/o un Esercizio D di un appello precedente, dovrebbe includere un'indicazione a proposito su questo compito.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad\qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z \qquad\qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

A. Usare la sostituzione $u = e^{-t}$ e calcolare

$$\int \frac{1}{(e^t+2)(e^t+3)}\, dt$$

B. Sia $A > 0$ un parametro fisso, e sia $\mathcal{Q}$ il quadrato definito da:

$$|x|, |y| \leq A$$

Fare un disegno di $\mathcal{Q}$ e poi calcolare la sua area usando le *coordinate polari.* (Per questo calcolo occorre decomporre $\mathcal{Q}$ in quattro pezzi.)

C. Sia $B > 0$ un parametro fisso. Sia $\mathcal{V}$ il volume definito da:

$$0 \leq z \leq B \qquad\qquad (x-z)^2 + y^2 \leq z^2$$

1. Si consideri la sezione di $\mathcal{V}$ corrispondente ad un fisso valore di z. Fare un disegno di quella sezione nel piano-(x, y).

2. Usare le *coordinate cilindriche* e calcolare la media di x sul volume $\mathcal{V}$.

D. Siano P, Q, e R tre parametri fissi. Si consideri il sistema:

$$\begin{array}{llll} a & +b & +c & = 2P \\ a & +3b & +5c & = 2Q \\ a & +5b & +9c & = 2R \end{array}$$

Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema in ciascuno di questi due casi:

1. $P + R = 2Q$, e

2. $P + R \neq 2Q$.

1/9

$\boxed{A}$ $u = e^{-t}$ $du = -e^{-t} dt$

$e^{t} = 1/u$ $dt = -e^{t} du$

$= -du/u$

$$\int \frac{1}{(e^{t}+2)(e^{t}+3)} dt$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{u}+2\right)\left(\frac{1}{u}+3\right)} \left(-\frac{1}{u}\right) du$$

$$= - \int \frac{u}{(1+2u)(1+3u)} du$$

$$\frac{u}{(1+2u)(1+3u)} = A \frac{1}{1+2u} + B \frac{1}{1+3u}$$

2/9

$$u = A(1+3u) + B(1+2u)$$

$u = -\frac{1}{3}$ $\rightsquigarrow$ $-\frac{1}{3} = 0 + B(1-\frac{2}{3}) = B(\frac{1}{3})$

$\rightarrow B = -1$

$u = -\frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ $-\frac{1}{2} = A(1-\frac{3}{2}) + 0 = A(-\frac{1}{2})$

$\rightsquigarrow A = 1$

$$\int \frac{1}{(e^t+2)(e^t+3)} \, dt$$

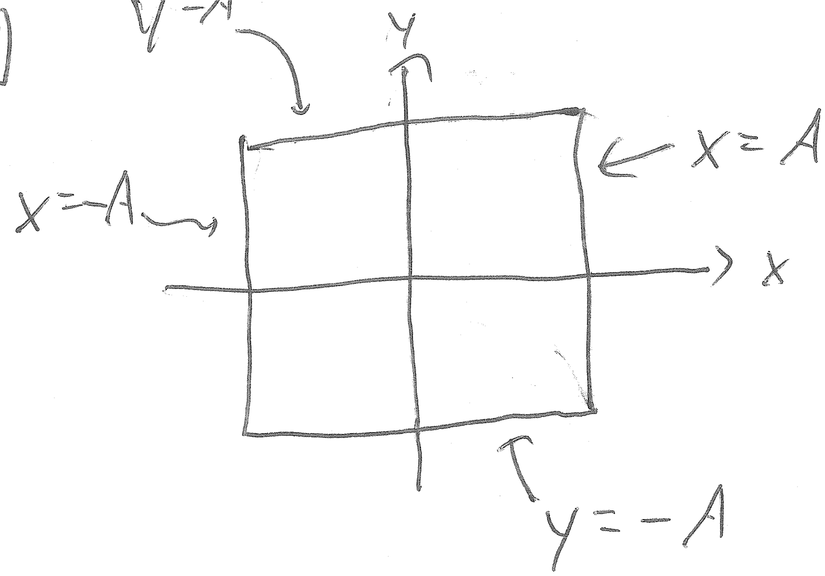
$$= -\left(\int \frac{1}{1+2u} - \frac{1}{1+3u} \right) du$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(1+2u) + \frac{1}{3} \ln(1+3u)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(1+2e^{-t}) + \frac{1}{3} \ln(1+3e^{-t})$$

3/9

$\boxed{B}$



$x = A \rightsquigarrow r\cos\theta = A \rightsquigarrow r = A\sec\theta$

$y = A \rightsquigarrow r\,\mathrm{sen}\,\theta = A \rightsquigarrow r = A\csc\theta$

$x = -A \rightsquigarrow r\cos\theta = -A \rightsquigarrow r = -A\sec\theta$

$y = -A \rightsquigarrow r\,\mathrm{sen}\,\theta = -A \rightsquigarrow r = -A\csc\theta$

$\text{area}(\Omega) = \iint_\Omega 1\, dA$

$= \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_{r=0}^{A\sec\theta} 1 \cdot r\, dr \right) d\theta$

$+ \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_{r=0}^{A\csc\theta} r\, dr \right) d\theta + \int_{\theta=3\pi/4}^{5\pi/4} \left(\int_{r=0}^{-A\sec\theta} r\, dr \right) d\theta$

$+ \int_{\theta=5\pi/4}^{7\pi/4} \left(\int_{r=0}^{-A\csc\theta} r\, dr \right) d\theta$

4/9

$$= \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} A^2 \sec^2\theta \, d\theta + \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2} A^2 \csc^2\theta \, d\theta$$

$$+ \int_{\theta=3\pi/4}^{5\pi/4} \frac{1}{2} A^2 \sec^2\theta \, d\theta + \int_{\theta=5\pi/4}^{7\pi/4} \frac{1}{2} A^2 \csc^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} A^2 \Big(tg\,\theta \Big]_{\theta=\pi/4}^{\pi/4} - ctg\,\theta \Big]_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$+ tg\,\theta \Big]_{\theta=3\pi/4}^{5\pi/4} - ctg\,\theta \Big]_{\theta=5\pi/4}^{7\pi/4} \Big)$$

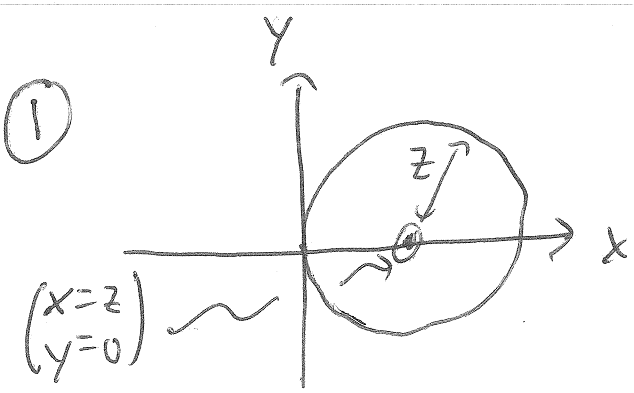
$$= \frac{1}{2} A^2 \Big((1-(-1)) - ((-1)-1)$$

$$+ (1-(-1)) - ((-1)-1) \Big)$$

$$= \frac{1}{2} A^2 \cdot 8 = 4A^2$$

$\boxed{C}$ 1

z fissato



5/9

(2) $(x-z)^2+y^2 \le z^2$

$\hookrightarrow x^2-2xz+z^2+y^2 \le z^2$

$\hookrightarrow x^2+y^2 \le 2xz \rightsquigarrow r^2 \le 2r\cos\theta \cdot z$

$\rightsquigarrow r \le 2\cos\theta\, z$, dunque

$0 \le r \le 2\cos\theta\, z$

$0 \le 2\cos\theta \cdot z \rightsquigarrow 0 \le \cos\theta$
(poiché $z \ge 0$)

$\rightsquigarrow -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

$$\iiint_V 1\, dV = \int_{z=0}^{3}\left(\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{2\cos\theta\, z} 1\cdot r\, dr\right)d\theta\right)dz$$

$$= \int_{z=0}^{3}\left(\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(2\cos\theta\, z)^2\, d\theta\right)dz$$

$$= \int_{z=0}^{3} 2z^2\left(\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta\right)dz$$

$$= \int_{z=0}^{b} 2z^2 \cdot \frac{\pi}{2}\, dz = \pi \int_{z=0}^{b} z^2\, dz$$

$$= \pi b^3/3$$

$$\iiint_{V} x\, dV$$

$$= \int_{z=0}^{b} \left(\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{2\cos\theta\, z} (r\cos\theta)\, r\, dr \right) d\theta \right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{b} \left(\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \cdot \frac{1}{3} (2\cos\theta\, z)^3\, d\theta \right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{b} \frac{8}{3} z^3 \left(\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta \right) dz$$

$$\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{1}{4} \sin\theta \cos^3\theta \Big]_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{4} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8} \right]$$

7/9

$$= \int_{z=0}^{B} \frac{8}{3} z^3 \cdot \frac{3\pi}{8} dz = \pi \int_{z=0}^{B} z^3 dz$$

$$= \pi B^4/4$$

$$\bar{x} = \frac{\iiint_q x \, dV}{\iiint_q 1 \, dV} = \frac{\pi B^4/4}{\pi B^3/3} = \frac{3}{4} B$$

$\boxed{D}$

a	b	c	=	P	Q	R
1	1	1		2	0	0
1	3	5		0	2	0
1	5	9		0	0	2

$E2 \leftarrow E2 - E1$

$E3 \leftarrow E3 - E1$

1	1	1	2	0	0
0	2	4	-2	2	0
0	4	8	-2	0	2

8/9

$E2 \leftarrow E2/2$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -2 & 0 & 2 \end{matrix}$$

$E1 \leftarrow E1 - E2$

$E3 \leftarrow E3 - 4E2$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ \hline a & b & c & P & Q & R \end{array}$$

$$a - c = 3P - Q$$
$$b + 2c = -P + Q$$
$$0 = 2P - 4Q + 2R$$

1) Se $P + R = 2Q$, allora

$2P - 4Q + 2R = 2(P+R) - 4Q = 0$

e la terza equazione si può depennare:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= c + 3P - Q \\ b &= -2c - P + Q \\ c &= c \end{aligned}} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3P-Q \\ -P+Q \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) Se $P+R \neq 2Q$, allora

$$2P-4Q+2R = 2(P+R)-4Q \neq 0.$$

Perciò l'ultima equazione ("$0 = 2P-4Q+2R$") non vale, che vuol dire che <u>non ci sono soluzioni</u> al sistema originale.