DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 12 luglio 2021

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione giovedì 15 luglio, alle 12.30, al 1° piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad\qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z \qquad\qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

A. Calcolare

$$\int \frac{u^4}{u^2-1}\,du$$

1. direttamente, e
2. dopo l'applicazione della sostituzione $u = 1/v$,

e paragonare i due esiti.

B. Sia $Q > 0$ un parametro fissato, sia $\mathcal{F}$ la zona del piano definito da

$$|y| \leq x \qquad\qquad x^2 + y^2 \leq Q^2$$

Prima, fare un disegno di $\mathcal{F}$. Poi usare le coordinate polari e calcolare

$$\iint_{\mathcal{F}} e^{-y^2}\, dA$$

Finalmente, calcolare

$$\iint_{|y|\leq x} e^{-y^2}\, dA = \lim_{Q\to+\infty} \iint_{\mathcal{F}} e^{-y^2}\, dA$$

C. Siano A, B, e R parametri positivi fissi. Sia $\mathcal{F}$ la forma definita da

$$x^2 + y^2 \leq R^2 \qquad\qquad 0 \leq z \leq A + Bx^2$$

Fare uno schizzo e/o una descrizione verbale della forma $\mathcal{F}$. Poi usare le coordinate cilindriche e calcolare il volume di $\mathcal{F}$.

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{array}{llll} A & +B/2 & +C/3 & = p \\ A/2 & +B/3 & +C/4 & = q \\ A/3 & +B/4 & +C/5 & = r \end{array}$$

per le incognite A, B, C in termine dei parametri p, q, r. (Indicazione: non rimane nessun denominatore nella risposta finale.)

1/10

$\boxed{A}$ 1

$$\begin{array}{l|l}
u^4 & u^2-1 \\ \hline
\underline{u^4-u^2} & u^2+1 \\
\quad +u^2 & \\
\quad \underline{u^2-1} & \\
\qquad +1 &
\end{array}$$

$$u^4 = (u^2-1)(u^2+1)+1$$

$$\frac{u^4}{u^2-1} = u^2+1+\frac{1}{u^2-1}$$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}$$

$$\hookrightarrow \quad 1 = A(u+1)+B(u-1)$$

$$u=-1 \rightsquigarrow 1 = 0 + B(-1-1) \to B = \frac{-1}{2}$$

$$u=+1 \rightsquigarrow 1 = A(1+1)+0 \to A = \frac{+1}{2}$$

2/10

$$\int u^2 + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{u-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{u+1}\,du$$

$$= \frac{u^3}{3} + u + \frac{1}{2}\log(u-1) - \frac{1}{2}\log(u+1)$$

2 $\quad u = \frac{1}{v} \qquad du = -\frac{1}{v^2}\,dv$

$$\int \frac{u^4}{u^2-1}\,du = \int \frac{(1/v)^4}{(1/v)^2-1}\left(-\frac{1}{v^2}\right)dv$$

$$= \int \frac{1}{v^4}\,\frac{1}{1-v^2}\,(-1)\,dv$$

$$= \int \frac{1}{v^4}\,\frac{1}{v^2-1}\,dv$$

$$\frac{1}{v^4}\,\frac{1}{v^2-1} = \frac{A}{v-1} + \frac{B}{v+1} + \frac{C}{v} + \frac{D}{v^2} + \frac{E}{v^3} + \frac{F}{v^4}$$

$$1 = Av^4(v+1) + Bv^4(v-1) + Cv^3(v-1)(v+1)$$
$$+ Dv^2(v-1)(v+1) + Ev(v-1)(v+1) + F(v-1)(v+1)$$

3/10

$$v=0 \rightsquigarrow 1 = 0+0+0+0+0+F(0-1)(0+1)$$

$$\rightsquigarrow F=-1$$

$$v=-1 \rightsquigarrow 1 = 0 + B(-1)^4(-1-1) + 0+0+0+0$$

$$\longrightarrow B = -1/2$$

$$v=+1 \rightsquigarrow 1 = A(+1)^4(1+1)+0+0+0+0+0$$

$$\rightsquigarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
1 = {} & \tfrac{1}{2}(v^5 + v^4) \\
& - \tfrac{1}{2}(v^5 - v^4) \\
& + C(v^5 - v^3) \\
& + D(v^4 - v^2) \\
& + E(v^3 - v) \\
& - 1(v^2 - 1)
\end{aligned}$$

$$= C v^5 + (1+D)v^4 + (-C+E)v^3 + (-D-1)v^2 + (-E)v + 1$$

$4/10$

$$\rightsquigarrow \quad C = 0 \quad \rightsquigarrow \quad C = 0$$

$$D + 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad D = -1$$

$$-C + E = 0 \quad \longrightarrow \quad E = C = 0$$

$$-D - 1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad D = -1$$

$$-E = 0 \quad \rightsquigarrow \quad E = 0$$

$$1 = 1$$

$$\int \frac{1}{2} \frac{1}{v-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{v+1} - \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^4} \, dv$$

$$= \frac{1}{2} \log(v-1) - \frac{1}{2} \log(v+1) + \frac{1}{v} + \frac{1}{3} \frac{1}{v^3}$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{u} - 1\right) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{u} + 1\right) + u + \frac{1}{3} u^3$$

$$= \frac{u^3}{3} + u + \frac{1}{2} \log\left(\frac{u-1}{u}\right) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{u+1}{u}\right)$$

$$= \frac{u^3}{3} + u + \frac{1}{2} \log(u-1) - \frac{1}{2} \log(u)$$

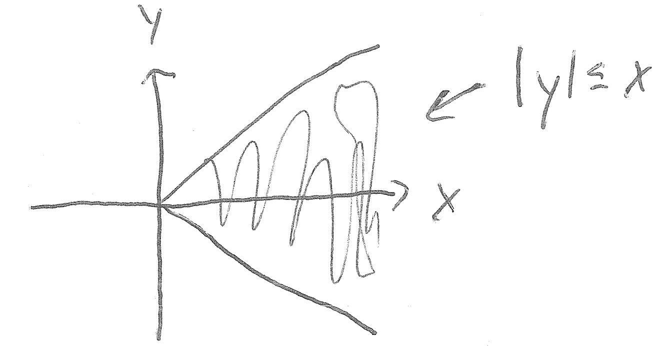
$$- \frac{1}{2} \log(u+1) + \frac{1}{2} \log(u)$$

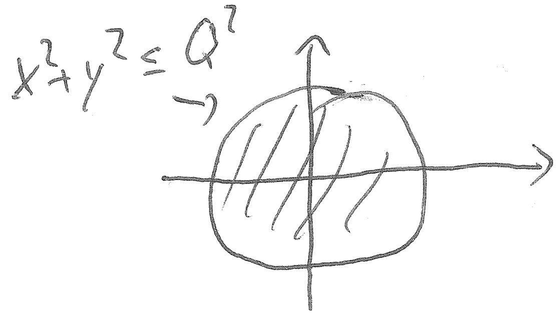
$$= \frac{u^3}{3} - \frac{1}{2} \log(u+1) - \frac{1}{2} \log(u+1)$$

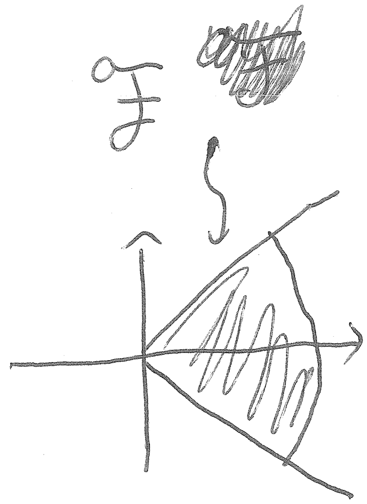
v

5/10

$\boxed{B}$







$$x^2 + y^2 \leq a^2 \to r^2 \leq a^2 \to r \leq a$$

$$|y| \leq x \to |r \operatorname{sen}\theta| \leq r\cos\theta$$
$$\to |\operatorname{sen}\theta| \leq \cos\theta$$
$$\to -\cos\theta \leq \operatorname{sen}\theta \leq \cos\theta$$
$$\to -1 \leq \operatorname{tg}\theta \leq 1$$
$$\to -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\iint_D e^{-y^2}\, dA = \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_{r=0}^{a} e^{-(r\operatorname{sen}\theta)^2}\, r\, dr \right) d\theta$$

6/10

$$= \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_{u=0}^{Q} u e^{-u^2 \operatorname{sen}^2\theta} \, du \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \left. \frac{-1}{2\operatorname{sen}^2\theta} e^{-u^2 \operatorname{sen}^2\theta} \right]_{u=0}^{Q} d\theta$$

$$= \boxed{\int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} +\frac{1}{2\operatorname{sen}^2\theta} \left(1 - e^{-Q^2 \operatorname{sen}^2\theta} \right) d\theta}$$

Allora $\displaystyle\int \frac{1}{2\operatorname{sen}^2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int \csc^2\theta \, d\theta$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\theta$$

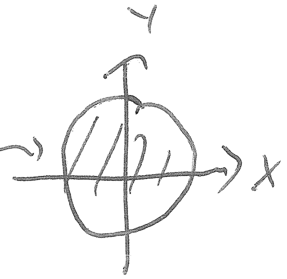
ma l'altro integrale è troppo difficile (deve essere una "funzione di Bessel").

Quindi, si ferma qui.

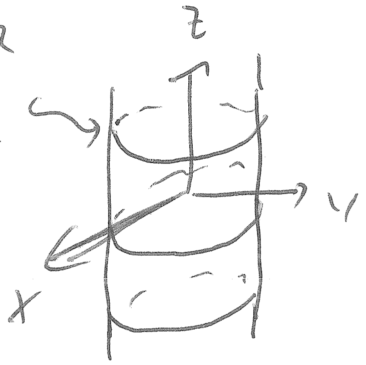
7/10

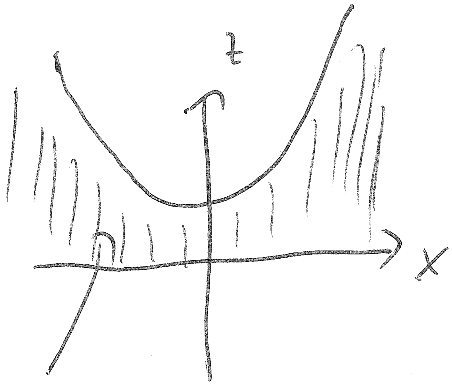
$\boxed{C}$

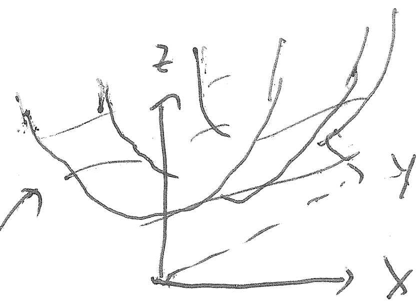
$x^2+y^2 \le R^2$



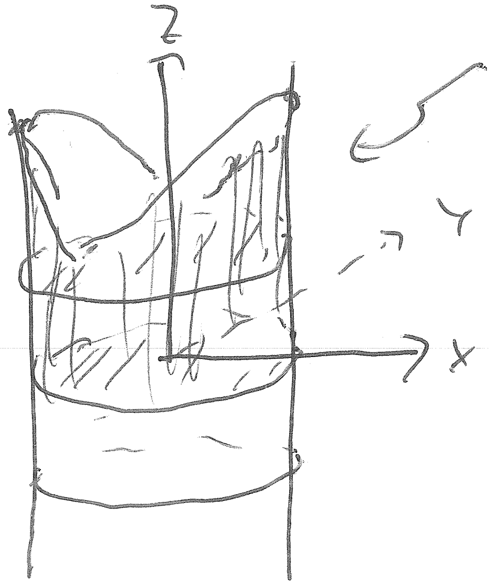
$x^2+y^2 \le R^2$







$0 \le z \le A + Bx^2$



Ω

8/10

$$x^2+y^2 \le R^2 \rightsquigarrow r^2 \le R^2 \rightsquigarrow r \le R$$

$$0 \le z \le A + Bx^2 \rightsquigarrow 0 \le z \le A + Br^2\cos^2\theta$$

$$\iiint_{\mathcal{F}} 1 \, dV$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{r=0}^{R} \left(\int_{z=0}^{A+Br^2\cos^2\theta} 1 \cdot r \, dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{r=0}^{R} Ar + Br^3\cos^2\theta \, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}AR^2 + \frac{1}{4}BR^4\cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}AR^2\right) + \pi\left(\frac{1}{4}BR^4\right)$$

$$= \pi AR^2 + \frac{1}{4}\pi BR^4$$

9/10

A	B	C	=	p	q	r
1	1/2	1/3		1	0	0
1/2	1/3	1/4		0	1	0
1/3	1/4	1/5		0	0	1

$E2 \leftarrow E3 - \frac{1}{2}E1$
$E3 \leftarrow E3 - \frac{1}{3}E1$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1/2 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/12 & 4/45 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}$$

$E2 \leftarrow 12\,E2$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1/2 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 1/12 & 4/45 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}$$

$E1 \leftarrow E1 - \frac{1}{2}E2$
$E3 \leftarrow E3 - \frac{1}{12}E2$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1/6 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/180 & 1/6 & -1 & 1 \end{array}$$

$E3 \leftarrow 180 \cdot E3$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1/6 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{array}$$

10 / 10

$E1 \leftarrow E1 + \frac{1}{6}E3$

$E2 \leftarrow E2 - E3$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \\ \hline A & B & C = & p & q & r \end{array}$$

$$A = 9p - 36q + 30r$$
$$B = -36p + 192q - 180r$$
$$C = 30p - 180q + 180r$$

<u>Controllo</u> : $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{5}C = \frac{1}{3}(9p - 36q + 30r) + \frac{1}{4}(-36p + 192q - 180r) + \frac{1}{5}(30p - 180q + 180r)$$

$$= (3p - 12q + 10r) + (-9p + 48q - 45r) + (6p - 36q + 36r) = 0p + 0q + 1r = r \; ✓$$