DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 21 giugno 2021

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione mercoledì 23 giugno, alle 12.30, al 1° piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$$

A. Calcolare

$$\int \frac{z^4}{z^4 + z^2 - 2}\, dz$$

B. Sia $B > 0$ un parametro fissato, sia $\mathcal{F}$ la zona del piano definito da

$$0 \leq y \leq B \qquad\qquad |x| \leq y$$

Prima, fare un disegno di $\mathcal{F}$. Poi calcolare

$$\iint_{\mathcal{F}} e^{-y^2}\, dA$$

e finalmente calcolare

$$\iint_{x \leq |y|} e^{-y^2}\, dA = \lim_{B \to +\infty} \iint_{\mathcal{F}} e^{-y^2}\, dA$$

C. Sia $R > 0$ un parametro fisso, e sia $\mathcal{O}$ l'ottava parte della sfera definita da

$$x, y, z \geq 0 \qquad\qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

Usare le coordinate sferiche, calcolare

$$\iiint_{\mathcal{O}} z^3\, dV \qquad \text{e} \qquad \iiint_{\mathcal{O}} x^3\, dV$$

e verificare che sono uguali.

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{array}{rrrl}
A & +B & +C & = p + q + r \\
2A & +3B & +4C & = 2p + 4q + 8r \\
3A & +6B & +10C & = 3p + 9q + 27r \\
-2A & +B & & = -2p + 4q - 8r \\
-3A & +3B & -C & = -3p + 9q - 27r
\end{array}$$

per le incognite A, B, C in termine dei parametri p, q, r.

$\boxed{A}$

$$\begin{array}{l|l} z^4 & z^4+z^2-2 \\ \hline z^4+z^2-2 & 1 \\ \hline\hline // \quad -z^2+2 & \end{array}$$

$\hookrightarrow \quad z^4 = 1\cdot(z^4+z^2-2) + (-z^2+2)$

$\hookrightarrow \quad \dfrac{z^4}{z^4+z^2-2} = 1 + \dfrac{-z^2+2}{z^4+z^2-2}$

Con $z^2 = s$

$$z^4+z^2-2 = s^2+s-2 = (s+2)(s-1)$$
$$= (z^2+2)(z^2-1)$$
$$= (z^2+2)(z+1)(z-1)$$

$$\frac{-z^2+2}{z^4+z^2-2} = \frac{A}{z^2+2} + \frac{B(2z)}{z^2+2} + \frac{C}{z+1} + \frac{D}{z-1}$$

$\hookrightarrow \quad -z^2+2 = A(z+1)(z-1) + 2Bz(z+1)(z-1)$
$\qquad + C(z^2+2)(z-1) + D(z^2+2)(z+1)$

2/9

$z=1 \rightsquigarrow -1^2+2 = 0+0+0+D(1^2+2)(1+1)$

$\rightsquigarrow \quad 1 = D(3)(2) \rightsquigarrow D = 1/6$

$z=-1 \rightsquigarrow -(-1)^2+2 = 0+0+C((-1)^2+2)(-1-1) + 0$

$\rightsquigarrow 1 = C(3)(-2) \rightsquigarrow C = -1/6$

$$\begin{aligned} -z^2+2 = {} & A(z^2 - 1) \\ & + B(2z^3 - 2z) \\ & - \frac{1}{6}(z^3 - z^2 + 2z - 2) \\ & + \frac{1}{6}(z^3+z^2+2z+2) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow 2B = 0 \qquad \rightsquigarrow B = 0$

$A + \frac{1}{3} = -1 \qquad \rightsquigarrow A = -4/3$

$-2B = 0 \qquad \rightsquigarrow B = 0$

$-A + \frac{2}{3} = 2 \qquad \rightsquigarrow A = -4/3$

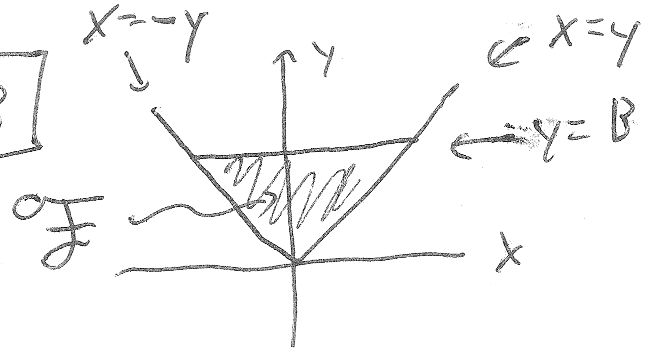
3/9

$$\int \frac{z^4}{z^4+z^2-2}\,dz$$

$$= \int 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{z^2+2} - \frac{1}{6}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{z-1}\,dz$$

$$= z - \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{6}\log(z+1) + \frac{1}{6}\log(z-1)$$

$\boxed{B}$



$$\iint_{\mathcal{T}} e^{-y^2}\,dA = \int_{y=0}^{B}\left(\int_{x=-y}^{y} e^{-y^2}\,dx\right)dy$$

$$= \int_{y=0}^{B} 2y e^{-y^2}\,dy = -e^{-y^2}\Big]_{y=0}^{y=B}$$

$$= 1 - e^{-B^2}$$

4/9

$$\iint_{|x|\le y} e^{-y^2}\,dy = \lim_{\beta\to+\infty} \iint_{\substack{|x|\le y\\ 0\le y\le\beta}} e^{-y^2}\,dy$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} 1-e^{-\beta^2} = 1$$

$\boxed{C}$ $x^2+y^2+z^2 \le R^2 \rightsquigarrow r^2 \le R^2 \rightsquigarrow r \le R$

$z \ge 0 \rightsquigarrow r\cos\theta \ge 0 \rightsquigarrow \theta \le \frac{\pi}{2}$

$x, y \ge 0 \rightsquigarrow r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi,\ r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \ge 0$

$\rightsquigarrow \cos\varphi, \text{sen}\,\varphi \ge 0$

$\rightsquigarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Como sempre $r \ge 0$, $0 \le \theta \le \pi$

$$\iiint_{\Theta} z^3\,dV$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\left(\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{R}(r\cos\theta)^3 r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\right)d\theta\right)d\varphi$$

5/9

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta \left(\int_{r=0}^{R} r^5 \, dr \right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta \; \frac{R^6}{6} \, d\theta$$

$$= \frac{\pi R^6}{12} \left(-\frac{\cos^4\theta}{4} \right) \Bigg]_{\theta=0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi R^6}{12} \left(-\frac{0^4}{4} + \frac{1^4}{4} \right) = \frac{\pi R^6}{48}$$

$$\iiint_{\Theta} x^3 \, dV$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{R} (r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi)^3 \, r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

6/9

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^3\varphi \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\theta \left(\int_{r=0}^{R} r^5\, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$\Big[\int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3} \operatorname{sen}\varphi \cos^2\varphi \Big]_{\varphi=0}^{\pi/2}$$

$$+ \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \Big]$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta = -\frac{1}{4} \cos\theta \operatorname{sen}^3\theta \Big]_{\theta=0}^{\pi/2}$$

$$+ \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$= 0 + \frac{3}{4} \Big(-\frac{1}{2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \Big]_{\theta=0}^{\pi/2}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1\, d\theta \Big)$$

$$= \frac{3}{4} \left(0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{16} \Big]$$

7/9

$$\iiint_{\Theta} x^3 \, dV$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^3\varphi \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\theta \cdot \frac{R^6}{6} \, d\theta \right) d\varphi$$

$$= \frac{R^6}{6} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^3\varphi \cdot \frac{3\pi}{16} \, d\varphi$$

$$= \frac{R^6}{6} \cdot \frac{3\pi}{16} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi R^6}{48}$$

(lo stesso)

$\boxed{D}$

A	B	C	=	p	q	r
1	1	1		1	1	1
2	3	4		2	4	8
3	6	10		3	9	27
−2	1	0		−2	4	−8
−3	3	−1		−3	9	−27

8/9

$E2 \leftarrow E2-2E1$, $E3 \leftarrow E3-3E1$

$E4 \leftarrow E4+2E1$, $E5 \leftarrow E5+3E1$

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 6 \\
0 & 3 & 7 & 0 & 6 & 24 \\
0 & 3 & 2 & 0 & 6 & -6 \\
0 & 6 & 2 & 0 & 12 & -24
\end{array}
$$

$E1 \leftarrow E1-E2$, $E3 \leftarrow E3-3E2$

$E4 \leftarrow E4-3E2$, $E5 \leftarrow E5-6E2$

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -5 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -24 \\
0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -60
\end{array}
$$

$$E1 \leftarrow E1 + E3, \quad E2 \leftarrow E2 - 2E3$$
$$\rightsquigarrow$$
$$E4 \leftarrow E4 + 4E3, \quad E5 \rightarrow E5 + 10E3$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{aligned} A &= p - q + r \\ B &= 2q - 6r \\ C &= 6r \end{aligned}$$ ← LA SOLUZIONE

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$ ← SEMPRE VALIDI

Controllo: (...)

$$\begin{aligned} 3A + 6B + 10C &= 3(p - q + r) \\ &\quad + 6(2q - 6r) \\ &\quad + 10(6r) \\ &= 3p + 9q + 27r \ ✓ \end{aligned}$$

(...)