DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 24 febbraio 2021

- Non si copia da nessuno.
- Non si chiede aiuto a nessuno; non si ottiene aiuto da nessuno.
- Ogni compito deve essere accompagnato da una dichiarazione (dettagli sotto) e di una riproduzione della Carta d'Identità.
- La durata della prova è di 3 ore, più 1 ora per mettere insieme tutto e spedirmelo. Quindi, l'esame comincia alle 10.00 e accetterò consegne fino alle 14.00.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

In quanto l'esame è svolto in remoto, si può:

- far riferimento ad un libro di testo;
- far riferimento agli appunti;
- utilizzare una calcolatrice;
- oppure un calcolatore.

Per consegnare il compito, si deve scannerizzare il lavoro (se questo è possibile) o fotografarlo, e spedirmelo per posta elettronica. Inoltre:

- Come prima pagina o prime due pagine, si deve includere la carta d'identità, appositamente scannerizzata o fotografata.
- Dopodiché si deve includere questa dichiarazione:

  > La sottoscritta/il sottoscritto _____ dichiara che il lavoro qui consegnato è il suo lavoro, che non ha copiato da nessuno, e che non ha né chiesto né ottenuto aiuto da nessuno.

  con tanto di *firma, data, e luogo.*
- Ogni pagina deve avere un numero di pagina sotto e una *firma* di lato.
- Per favore, mettete le soluzioni in ordine: prima la soluzione dell'Esercizio A, poi la soluzione dell'Esercizio B, ecc.
- Se si spedisce il compito come risposta al messaggio del docente, stia attento a rispondere *solo al docente*, non a tutti.

Alcune osservazioni:

- Per essere sufficiente, un compito deve avere buone soluzioni ad almeno 2 dei 4 esercizi, di cui almeno uno deve essere Esercizio B o Esercizio C.
- Se qualcuno vuol far valere il lavoro svolto su un Esercizio A e/o un Esercizio D di un appello precedente, dovrebbe includere un'indicazione a proposito su questo compito.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

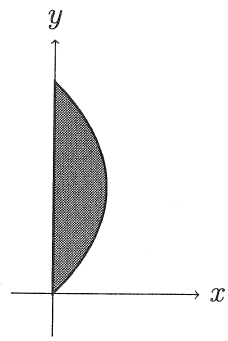
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

A. Calcolare l'antiderivata:

$$\int \frac{v}{v^4 - 1}\, dv$$

B. Sia $\mathcal{Z}$ l'area definita da:

$$0 \leq x \leq y - y^2$$



Usare le coordinate polari e calcolare l'area di $\mathcal{Z}$.

C. Siano A e B parametri fissi con $A > B > 0$. Sia $\mathcal{V}$ il volume definito da:

$$x^2 + y^2 \geq B^2 \qquad\qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq A^2$$

Fare un disegno di $\mathcal{V}$. Poi usare le coordinate cilindriche e calcolare il volume di $\mathcal{V}$

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{array}{llll} a & +b & +c & = 2 \\ a & +3b & +9c & = 24 \\ a & +6b & +36c & = 102 \end{array}$$

(Indicazione: il problema è truccato. Se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, non saranno necessari denominatori.)

1/8

A $u = v^2 \qquad du = 2v\,dv$

$$\int \frac{v}{v^4-1}\,dv = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2-1}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log(u-1) - \log(u+1)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log(v^2-1) - \log(v^2+1)\right)$$

OPPURE

$$v^4-1 = (v^2)^2-1 = (v^2-1)(v^2+1)$$

$$= (v-1)(v+1)(v^2+1)$$

$$\frac{v}{v^4-1} = \frac{A}{v-1} + \frac{B}{v+1} + \frac{C}{v^2+1} + \frac{D(2v)}{v^2+1}$$

2/8

$$V = A(v+1)(v^2+1) + B(v-1)(v^2+1)$$
$$+ C(v+1)(v-1) + D \cdot 2v(v+1)(v-1)$$

$v = -1 \rightsquigarrow -1 = 0 + B(-2)(2) + 0 + 0$

$\rightsquigarrow B = 1/4$

$v = +1 \rightsquigarrow 1 = A(2)(2) + 0 + 0 + 0$

$\rightsquigarrow A = 1/4$

$$V = A(v^3 + v^2 + v + 1)$$
$$+ B(v^3 - v^2 + v - 1)$$
$$+ C(v^2 - 1)$$
$$+ D(2v^3 - 2v)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} A + B + 2D = 0 \\ A - B + C = 0 \\ A + B - 2D = 0 \\ A - B - C = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2D = -1/2 \\ C = 0 \\ -2D = 1 - \frac{1}{2} \\ -C = 0 \end{cases}$$

3/8

$D = -1/4$

$C = 0$

$$\int \frac{v}{v^4-1}\,dv = \int \frac{1}{4}\frac{1}{v-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{v+1} - \frac{1}{4}\frac{2v}{v^2+1}\,dv$$

$$= \frac{1}{4}\log(v-1) + \frac{1}{4}\log(v+1) - \frac{1}{4}\log(v^2+1)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log|v^2-1| - \log(v^2+1)\right)$$

B $\quad 0 \le x \rightarrow 0 \le m\cos\theta \rightarrow 0 \le \cos\theta$

$$\rightsquigarrow -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$$

$$x \le y - y^2 \rightsquigarrow m\cos\theta \le m\operatorname{sen}\theta - m^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\rightsquigarrow \cos\theta \le \operatorname{sen}\theta - m\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\rightsquigarrow m\operatorname{sen}^2\theta \le \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$$

4/8

$$\rightsquigarrow r \leq \frac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(1 - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$= \csc\theta\,(1 - \operatorname{ctg}\theta)$$

$$\hookrightarrow 0 \leq \frac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \rightsquigarrow 0 \leq \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$$

$$\rightarrow \cos\theta \leq \operatorname{sen}\theta \rightsquigarrow 1 \leq \operatorname{tg}\theta$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta$$

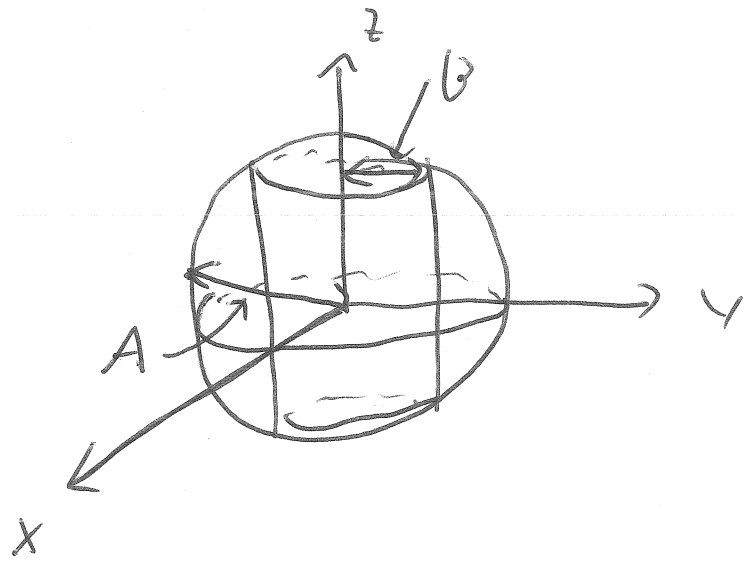
$$\iint_S I\,dA = \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{\csc\theta(1-\operatorname{ctg}\theta)} r\,dr\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \underbrace{\csc^2\theta}_{\text{DER. DI } \operatorname{ctg}\theta}\ \underbrace{(1-\operatorname{ctg}\theta)^2}_{\text{FUNZ. DI } \operatorname{ctg}\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\,(1-\operatorname{ctg}\theta)^3\Big]_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{6} - 0 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

5/8

C



V = la sfera con un buco cilindrico

$$x^2+y^2 \geq B^2 \rightsquigarrow (r\cos\theta)^2+(r\operatorname{sen}\theta)^2 \geq B^2$$

$$\rightsquigarrow r^2 \geq B^2 \rightarrow r \geq B$$

$$x^2+y^2+z^2 \leq A^2 \rightsquigarrow r^2+z^2 \leq A^2$$

$$\rightsquigarrow z^2 \leq A^2-r^2 \rightsquigarrow |z| \leq \sqrt{A^2-r^2}$$

$$\hookrightarrow 0 \leq A^2-r^2 \rightarrow r^2 \leq A^2 \rightsquigarrow r \leq A$$

6/8

$$\iiint_Q 1 \, dV = \int_{\theta=-\pi}^{+\pi} \left(\int_{m=B}^{A} \left(\int_{z=-\sqrt{A^2-m^2}}^{+\sqrt{A^2-m^2}} 1 \cdot m \, dz \right) dm \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_{m=B}^{A} \underbrace{2m}_{\text{DER. DI } m^2} \underbrace{\sqrt{A^2-m^2}}_{\text{FUNZ. DI } m^2} \, dm$$

$$= 2\pi \left(-\frac{2}{3} \right) (A^2-m^2)^{3/2} \Big]_{m=B}^{A}$$

$$= \boxed{\frac{4\pi}{3} (A^2-B^2)^{3/2}}$$

Controllo: se $B=0$, il volume viene $\frac{4\pi}{3}(A^2)^{3/2} = \frac{4\pi A^3}{3}$

7/8

D

a	b	c	=
①	1	1	2
1	3	9	24
1	6	36	102

$E2 \leftarrow E2-E1$, $E3 \leftarrow E3-E1$

①	1	1	2
0	②	8	22
0	5	35	100

$E2 \leftarrow E2/2$

①	1	1	2
0	①	4	11
0	5	35	100

$E1 \leftarrow E1-E2$, $E3 \leftarrow E3-5E2$

①	0	-3	-9
0	①	4	11
0	0	⑮	45

8/8

$E3 \leftarrow E3/15$

$$\begin{matrix} (1) & 0 & -3 & -9 \\ 0 & (1) & 4 & 11 \\ 0 & 0 & (1) & 3 \end{matrix}$$

$E1 \leftarrow E1+3E3$

$E2 \leftarrow E2-2E3$

a	b	c	=
(1)	0	0	0
0	(1)	0	−1
0	0	(1)	3

$a = 0$
$b = -1$
$c = 3$

Controllo:

$a+b+c = 0-1+3 = 2$ (v)

$a+3b+9c = 0-3+27 = 24$ (v)

$a+6b+36c = 0-6+108 = 102$ (v)