DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 4 febbraio 2021

- Non si copia da nessuno.
- Non si chiede aiuto a nessuno; non si ottiene aiuto da nessuno.
- Ogni compito deve essere accompagnato da una dichiarazione (dettagli sotto) e di una riproduzione della Carta d'Identità.
- La durata della prova è di 3 ore, più 1 ora per mettere insieme tutto e spedirmelo. Quindi, l'esame comincia alle 10.00 e accetterò consegne fino alle 14.00.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

In quanto l'esame è svolto in remoto, si può:

- far riferimento ad un libro di testo;
- far riferimento agli appunti;
- utilizzare una calcolatrice;
- oppure un calcolatore.

Per consegnare il compito, si deve scannerizzare il lavoro (se questo è possibile) o fotografarlo, e spedirmelo per posta elettronica. Inoltre:

- Come prima pagina o prime due pagine, si deve includere la carta d'identità, appositamente scannerizzata o fotografata.
- Dopodiché si deve includere questa dichiarazione:

  > La sottoscritta/il sottoscritto ... dichiara che il lavoro qui consegnato è il suo lavoro, che non ha copiato da nessuno, e che non ha né chiesto né ottenuto aiuto da nessuno.

  con tanto di *firma, data, e luogo.*
- Ogni pagina deve avere un numero di pagina sotto e una *firma* di lato.
- Per favore, mettete le soluzioni in ordine: prima la soluzione dell'Esercizio A, poi la soluzione dell'Esercizio B, ecc.
- Se si spedisce il compito come risposta al messaggio del docente, stia attento a rispondere *solo al docente*, non a tutti.

Alcune osservazioni:

- Per essere sufficiente, un compito deve avere buone soluzioni ad almeno 2 dei 4 esercizi, di cui almeno uno deve essere Esercizio B o Esercizio C.
- Se qualcuno vuol far valere il lavoro svolto su un Esercizio A e/o un Esercizio D di un appello precedente, dovrebbe includere un'indicazione a proposito su questo compito.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

A. Si consideri l'antiderivata:

$$\int \frac{1}{9u^2+1}\,du$$

1. Calcolarla direttamente.
2. Calcolarla usando la sostituzione $u = 1/v$.
3. Paragonare i due esiti.

B. Siano p, q, r, e s le 4 coordinate di spazio 4-dimensionale. Calcolare la media di q^2 sulla forma 4-dimensionale determinata dalle disuguaglianze:

$$0 \le p \le q \le r \le s \le 1$$

C. Siano A e B parametri fissi con $0 < A < B$. Sia $\mathcal{S}$ il volume definito da:

$$A^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le B^2 \qquad \text{e} \qquad x \ge 0$$

Usare le coordinate sferiche e calcolare $\iiint_{\mathcal{S}} x^3\,dV$.

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned} p+q+r &= -6 \\ q+r+s &= 6 \\ r+s+t &= -6 \\ s+t+u &= 6 \\ t+u+p &= -6 \\ u+p+q &= 6 \end{aligned}$$

$\boxed{A}$ 1

$u = \frac{1}{3} tg\, x$

$du = \frac{1}{3} sec^2 x\, dx$

$$\int \frac{1}{9u^2+1}\, du = \int \frac{1}{tg^2 x + 1} \cdot \frac{1}{3} sec^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int 1\, dx = \frac{1}{3} x$$

$$= \frac{1}{3} arctg(3u)$$

2

$u = \frac{1}{v}$

$du = -\frac{1}{v^2}\, dv$

$$\int \frac{1}{9u^2+1}\, du = \int \frac{1}{\frac{9}{v^2}+1} \left(-\frac{1}{v^2}\right) dv$$

$$= -\int \frac{1}{9+v^2}\, dv$$

2/10

$v = 3\,tg\,y$

$dv = 3\sec^2 y\,dy$

$$= -\int \frac{1}{9+9tg^2 y}\cdot 3\sec^2 y\,dy$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+tg^2 y}\cdot \sec^2 y\,dy$$

$$= -\frac{1}{3}\int 1\,dy = -\frac{1}{3}y$$

$$= -\frac{1}{3}\,arctg\left(\frac{v}{3}\right) = -\frac{1}{3}\,arctg\left(\frac{1}{3u}\right)$$

3 Ci serve l'identità

$$\boxed{arctg\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\pi}{2} - arctg(T)}$$

$\theta = arctg(T) \rightarrow tg\,\theta = T$

$\rightarrow tg(\pi/2-\theta) = sen(\pi/2-\theta)/cos(\pi/2-\theta)$

$= cos(\theta)/sen(\theta) = 1/tg\,\theta = 1/T$

3/10

$$\to \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(T) = \frac{\pi}{2} - \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{T}\right)$$

Quindi

$$-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3u}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(3u)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3u) - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3u) + C$$

con $C = -\pi/6$

$\boxed{B}$ $$\iiiint I \, dp\, dq\, dr\, ds$$

$0 \leq p \leq q \leq r \leq s \leq 1$

$$= \int_{s=0}^{1}\left(\int_{r=0}^{s}\left(\int_{q=0}^{r}\left(\int_{p=0}^{q} I \, dp\right) dq\right) dr\right) ds$$

4/10

$$= \int_{s=0}^{1} \left(\int_{m=0}^{s} \left(\int_{q=0}^{m} q \, dq \right) dm \right) ds$$

$$= \int_{s=0}^{1} \left(\int_{m=0}^{s} \frac{1}{2} m^2 dm \right) ds$$

$$= \int_{s=0}^{1} \frac{1}{6} s^3 ds = \frac{1}{24}$$

$$\iiiint\limits_{0 \le p \le q \le m \le s \le 1} q^7 \, dp \, dq \, dm \, ds$$

$$= \int_{s=0}^{1} \left(\int_{m=0}^{s} \left(\int_{q=0}^{m} \left(\int_{p=0}^{q} q^7 dp \right) dq \right) dm \right) ds$$

$$= \int_{s=0}^{1} \left(\int_{m=0}^{s} \left(\int_{q=0}^{m} q^3 \, dq \right) dm \right) ds$$

$$= \int_{s=0}^{1} \left(\int_{m=0}^{s} \frac{1}{4} m^4 \, dm \right) ds$$

$$= \int_{s=0}^{1} \frac{1}{20} s^5 \, ds = \frac{1}{120}$$

5/10

$$\overline{q^2} = \frac{\iiiint q^2 \, dp \, dq \, dr \, ds}{\iiiint 1 \, dp \, dq \, dr \, ds}$$

$$= \frac{1/120}{1/24} = \frac{1}{5}$$

$\boxed{C}$ $A^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq B^2$

$\rightarrow A^2 \leq r^2 \leq B^2 \rightsquigarrow A \leq r \leq B$

$x \geq 0 \rightarrow r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \geq 0$

$\rightarrow \cos\varphi \geq 0 \rightsquigarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\iiint_{\mathcal{S}} x^3 \, dV$$

$$= \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{r=A}^{B} (r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi)^3 \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot\, r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

6/10

$$= \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^4\theta \left(\int_{r=A}^{B} r^5 \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$\Big[\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^4\theta = -\frac{1}{4}\cos\theta \operatorname{sen}^3\theta \Big]_{\theta=0}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta$$

$$= 0 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos\theta \operatorname{sen}\theta \Big]_{\theta=0}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi} 1 \, d\theta \right)$$

$$= 0 + \frac{3}{4}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = 3\pi/8 \quad \Big]$$

$$\Big[\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi \, d\varphi = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\varphi \cos^2\varphi \Big]_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{2}{3}\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= 0 + \frac{2}{3}\operatorname{sen}\varphi \Big]_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}(1-(-1))$$

$$= 4/3 \quad \Big]$$

$\boxed{7/10}$

$$\iiint_S x^3 \, dV$$

$$= \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^4\theta \cdot \left(\frac{B^6-A^6}{6}\right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi \cdot \left(\frac{3\pi}{8}\right)\left(\frac{B^6-A^6}{6}\right) d\varphi$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot (B^6-A^6) = \boxed{\frac{\pi}{12}(B^6-A^6)}$$

$\boxed{D}$

p	q	r	s	t	u	=
1	1	1	0	0	0	−6
0	1	1	1	0	0	6
0	0	1	1	1	0	−6
0	0	0	1	1	1	6
1	0	0	0	1	1	−6
1	1	0	0	0	1	6

8/10

$E5 \leftarrow E5 - E1$
$E6 \leftarrow E6 - E1$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{matrix}$$

$E1 \leftarrow E1 - E2$
$E5 \leftarrow E5 + E2$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{matrix}$$

$E2 \leftarrow E2 - E3$
$E6 \leftarrow E6 + E3$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{matrix}$$

9/10

$E1 \leftarrow E1 + E4$

$E3 \leftarrow E3 - E4$

$E5 \leftarrow E5 - E4$

$E6 \leftarrow E6 - E4$

p	q	r	s	t	u	=
1	0	0	0	1	1	-6
0	1	0	0	-1	0	12
0	0	1	0	0	-1	-12
0	0	0	1	1	1	6
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$$p + t + u = -6$$
$$q - t = 12$$
$$r - u = -12$$
$$s + t + u = 6$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - t - u \\ 12 + t \\ -12 + u \\ 6 - t - u \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -12 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10/10

Controllo:

$$p+q+r = (-6-t-u) + (12+t) + (-12+u) = -6$$ ✓

...