DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 28 settembre 2020

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Alcune osservazioni:

- Per essere sufficiente, un compito deve avere buone soluzioni ad almeno 2 dei 4 esercizi, di cui almeno uno deve essere Esercizio B o Esercizio C.
- Se qualcuno vuol far valere il lavoro svolto su un Esercizio A e/o un Esercizio D di un appello precedente, dovrebbe includere un'indicazione a proposito su questo compito.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad\qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

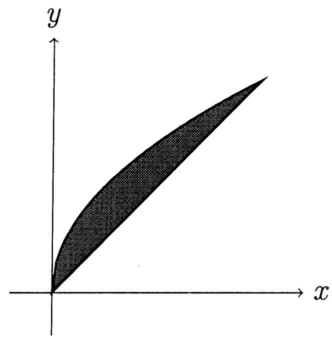
A. Calcolare

$$\int \frac{4z^3 + 30z^2 + 70z + 50}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)}\, dz$$

B. Sia $\mathcal{A}$ l'area determinata da:

$$0 \leq x \qquad\qquad x \leq y \leq \sqrt{x}$$

1. Usare le coordinate rettangolari (x e y) e calcolare l'area di $\mathcal{A}$.
2. Usare le coordinate polari (r e θ) e ricalcolare la stessa area.



C. Sia $R > 0$ un parametro fisso. Usare le coordinate sferiche e calcolare i tre integrali:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x,y \geq 0,\ z \leq 0} x\, dV$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x,z \geq 0,\ y \leq 0} x\, dV$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ y,z \geq 0,\ x \leq 0} x\, dV$$

D. Sia a un parametro fisso. Poniamo che $a \neq 0$, $a \neq 1$, e $a \neq -1$. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 1 \\ x & +ay & +a^2 z & = a^3 \\ x & +a^2 y & +a^4 z & = a^6 \end{array}$$

(Indicazione fondamentale: ogni frazione che appare qui si riduce ad un semplice polinomio. Ad esempio, $\frac{a^2-1}{a-1} = a+1$. In ciascun caso si può usare la divisione fra polinomi per calcolare il quoziente. È anche possibile procedere con l'uso della cancellazione di fattori comuni fra numeratore e denominatore.)

$\boxed{A}$ $\dfrac{4z^3+30z^2+70z+50}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)}$

$= \dfrac{A}{z+1} + \dfrac{B}{z+2} + \dfrac{C}{z+3} + \dfrac{D}{z+4}$

$\hookrightarrow 4z^3+30z^2+70z+50$

$= A(z+2)(z+3)(z+4)$

$+ B(z+1)(z+3)(z+4)$

$+ C(z+1)(z+2)(z+4)$

$+ D(z+1)(z+2)(z+3)$

$z=-1 \rightsquigarrow -4+30-70+50$

$= A(1)(2)(3)+0+0+0$

$\rightsquigarrow 6 = 6A \rightsquigarrow A=1$

$$z=-2 \rightsquigarrow -32+120-140+50$$

$$= 0 + B(-1)(+1)(2) + 0 + 0$$

$$\rightsquigarrow -2 = -2B \rightsquigarrow B = 1$$

$$z=-3 \rightsquigarrow -108+270-210+50$$

$$= 0 + 0 + C(-2)(-1)(+1)$$

$$\rightsquigarrow 2 = 2C \rightsquigarrow C = 1$$

$$z=-4 \rightsquigarrow -256+480-280+50$$

$$= 0 + 0 + 0 + D(-3)(-2)(-1)$$

$$\rightsquigarrow -6 = -6D \rightsquigarrow D = 1$$

$$\int \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+3} + \frac{1}{z+4}\, dz$$

$$= \log(z+1) + \log(z+2) + \log(z+3) + \log(z+4)$$

B ① $x \le \sqrt{x} \rightsquigarrow x^2 \le x \rightarrow x \le 1$

$$\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=x}^{\sqrt{x}} 1 \, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} x^{1/2} - x \, dx$$

$$= \left. \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

② $\begin{matrix} 0 \le x \\ 0 \le y \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 0 \le r\cos\theta \\ 0 \le r\,\text{sen}\,\theta \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 0 \le \cos\theta \\ 0 \le \text{sen}\,\theta \end{matrix}$

$$\rightsquigarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$x \le y \rightsquigarrow r\cos\theta \le r\,\text{sen}\,\theta$

$$\rightsquigarrow 1 \le \text{tg}\,\theta \rightarrow \frac{\pi}{4} \le \theta$$

$$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \pi$$

p. 4/13

$$y \le \sqrt{x} \rightsquigarrow y^2 \le x \rightsquigarrow (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 \le r\cos\theta$$

$$\rightsquigarrow r^2\,\mathrm{sen}^2\theta \le r\cos\theta$$

$$\rightsquigarrow r \le \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}$$

$$\int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{\cos\theta/\mathrm{sen}^2\theta} r\;dr\right)d\theta$$

$$= \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^4\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\mathrm{sen}^2\theta}{\mathrm{sen}^4\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \csc^4\theta - \csc^2\theta\;d\theta$$

$$\int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \csc^2\theta\,d\theta = -\mathrm{ctg}\,\theta\Big]_{\theta=\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= -0+1 = 1$$

$$\int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \csc^4\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\cot\theta\csc^2\theta\Big]_{\theta=\pi/4}^{\pi/2}$$

$$+\frac{2}{3}\int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2}\csc^2\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}(0-1\cdot 2)+\frac{2}{3}\cdot 1$$

$$= \frac{2}{3}+\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2}\csc^4\theta-\csc^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$\boxed{C}$ $x^2+y^2+z^2\le R^2 \rightsquigarrow r^2\le R^2$

$\rightsquigarrow r\le R$

Tenendo conto che si impone sempre

$$\rho \geq 0$$
$$0 \leq \theta \leq \pi \rightsquigarrow \operatorname{sen}\theta \geq 0$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

quando si usano le coordinate sferiche!

$$x \geq 0 \rightsquigarrow \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \geq 0 \rightsquigarrow \cos\varphi \geq 0$$
$$y \geq 0 \rightsquigarrow \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \geq 0 \rightsquigarrow \operatorname{sen}\varphi \geq 0$$

$$\rightarrow \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

$$z \leq 0 \rightsquigarrow \rho\cos\theta \leq 0 \rightsquigarrow \cos\theta \leq 0$$

$$\rightsquigarrow \pi/2 \leq \theta \leq \pi$$

$$\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\left(\int_{\theta=\pi/2}^{\pi}\left(\int_{\rho=0}^{R} \rho \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\theta \, d\rho\right) d\theta\right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos\varphi \left(\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta \cdot \frac{R^4}{4}\, d\theta\right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos\varphi \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{4}\, d\varphi$$

$$= 1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \cos\varphi \geq 0 \\ \operatorname{sen}\varphi \leq 0 \end{matrix} \to \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$z \geq 0 \to \cos\theta \geq 0 \to 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\varphi=3\pi/2}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{R} r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\varphi \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=3\pi/2}^{2\pi} \cos\varphi \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta \cdot \frac{R^4}{4}\, d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=3\pi/2}^{2\pi} \cos\varphi \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{4}\, d\varphi$$

$$= 1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16}$$

p. 8/13

$$\begin{matrix} x \le 0 \\ y \ge 0 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \cos\varphi \le 0 \\ \operatorname{sen}\varphi \ge 0 \end{matrix} \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$$

$$z \ge 0 \longrightarrow 0 \le \theta \le \pi/2$$

$$\int_{\varphi=\pi/2}^{\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{R} r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=\pi/2}^{\pi} \cos\varphi \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta \cdot \frac{R^4}{4} d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=\pi/2}^{\pi} \cos\varphi \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{4} \, d\varphi$$

$$= (-1) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{-\pi R^4}{16}$$

$$\begin{array}{cccc} X & Y & Z & = \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^4 & a^6 \end{array}$$

$E2 \leftarrow E2 - E1$

$E3 \leftarrow E3 - E1$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & a^3-1 \\ 0 & a^2-1 & a^4-1 & a^6-1 \end{array}$$

$E2 \leftarrow \frac{1}{a-1} E2$

[

$$\begin{array}{l|l} a^2 \qquad -1 & a-1 \\ \hline a^2 - a & a+1 \\ \hline \quad a - 1 & \\ \quad a - 1 & \\ \hline \quad // & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} a^3 \qquad\qquad -1 & a-1 \\ \hline a^3 - a^2 & a^2+a+1 \\ \hline \quad a^2 \qquad -1 & \\ \quad a^2 - a & \\ \hline \qquad a - 1 & \\ \qquad a - 1 & \\ \hline \qquad // & \end{array}$$

]

p. 10/13

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & a^2+a+1 \\ 0 & a^2-1 & a^4-1 & a^6-1 \end{matrix}$$

$E1 \leftarrow E1 - E2$

$\rightsquigarrow$

$E3 \leftarrow E3 - (a^2-1)E2$

$[(a^4-1) - (a^2-1)(a+1)$

$= a^4 - 1 - a^3 - a^2 + a + 1 = a^4 - a^3 - a^2 + a$

$(a^6-1) - (a^2-1)(a^2+a+1)$

$= a^6 - 1 - a^4 - a^3 - a^2 + a^2 + a + 1$

$= a^6 - a^4 - a^3 + a\,]$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -a & -a^2-a \\ 0 & 1 & a+1 & a^2+a+1 \\ 0 & 0 & a^4-a^3-a^2+a & a^6-a^4-a^3+a \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{E3 \leftarrow 1/(a^4-a^3-a^2+a)\, E3}$$

$$
\begin{array}{l|l}
a^6 \quad - a^4 - a^3 \quad + a & a^4 - a^3 - a^2 + a \\
\hline
a^6 - a^5 - a^4 + a^3 & a^2 + a + 1 \\
\hline
/\!/ \quad a^5 \quad - 2a^3 \quad + a & \\
\quad a^5 - a^4 - a^3 + a^2 & \\
\hline
/\!/ \quad + a^4 - a^3 - a^2 + a & \\
\quad a^4 - a^3 - a^2 + a & \\
\hline
\quad /\!/ &
\end{array}
$$

$$
\begin{matrix}
1 & 0 & -a & -a^2-a \\
0 & 1 & a+1 & a^2+a+1 \\
0 & 0 & 1 & a^2+a+1
\end{matrix}
$$

$$\xrightarrow[E2 \leftarrow E2 - (a+1)E3]{E1 \leftarrow E1 + aE3}$$

p.12/13

$$(-a^2-a)+a(a^2+a+1) = -a^2-a+a^3+a^2+a$$
$$= a^3$$

$$(a^2+a+1)-(a+1)(a^2+a+1)$$
$$= a^2+a+1-a^3-a^2-a-a^2-a-1$$
$$= -a^3-a^2-a$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 1 & 0 & -a^3-a^2-a \\ 0 & 0 & 1 & a^2+a+1 \end{array}$$

$x = a^3$

$y = -a^3-a^2-a$

$z = a^2+a+1$

Controllo: p.13/13

$$x+y+z = a^3 - a^3 - a^2 - a + a^2 + a + 1 = 1 \ (v)$$

$$x + ay + a^2 z = a^3 - a^4 - a^3 - a^2 + a^4 + a^3 + a^2 = a^3 \ (v)$$

$$x + a^2 y + a^4 z = a^3 - a^5 - a^4 - a^3 + a^6 + a^5 + a^4 = a^6 \ (v)$$