

DA STAMPARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 27 luglio 2020

- Non si copia da nessuno.
- Non si chiede aiuto a nessuno; non si ottiene aiuto da nessuno.
- Ogni compito deve essere accompagnato da una dichiarazione (dettagli sotto) e di una riproduzione della Carta d'Identità.
- La durata della prova è di 3 ore, più 1 ora per mettere insieme tutto e spedirmelo. Quindi, l'esame comincia alle 10.00 e accetterò consegne fino alle 14.00.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

In quanto l'esame è svolto in remoto, si può:

- far riferimento ad un libro di testo;
- far riferimento agli appunti;
- utilizzare una calcolatrice;
- oppure un calcolatore.

Per consegnare il compito, si deve scannerizzare il lavoro (se questo è possibile) o fotografarlo, e spedirmelo per posta elettronica. Inoltre:

- Come prima pagina o prime due pagine, si deve includere la carta d'identità, appositamente scannerizzata o fotografata.
- Dopodiché si deve includere questa dichiarazione:

La sottoscritta/il sottoscritto . . . dichiara che il lavoro qui consegnato è il suo lavoro, che non ha copiato da nessuno, e che non ha né chiesto né ottenuto aiuto da nessuno.

con tanto di *firma, data, e luogo*.

- Ogni pagina deve avere un numero di pagina sotto e una *firma* di lato.
- Per favore, mettete le soluzioni in ordine: prima la soluzione dell'Esercizio A, poi la soluzione dell'Esercizio B, ecc.
- Se si spedisce il compito come risposta al messaggio del docente, stia attento a rispondere *solo al docente*, non a tutti.

Alcune osservazioni:

- Per essere sufficiente, un compito deve avere buone soluzioni ad almeno 2 dei 4 esercizi, di cui almeno uno deve essere Esercizio B o Esercizio C.
- Se qualcuno vuol far valere il lavoro svolto su un Esercizio A e/o un Esercizio D di un appello precedente, dovrebbe includere un'indicazione a proposito su questo compito.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad dx dy = r dr d\theta$$

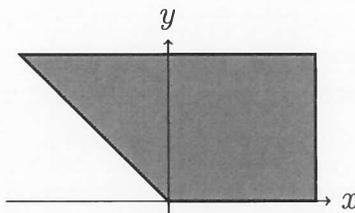
Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad dx dy dz = r dr d\theta dz$$

A. Usare la sostituzione $y = x^2$ e calcolare

$$\int \frac{x^5}{x^6 - x^2} dx$$

B. Usare le coordinate polari e calcolare l'area del quadrilatero con vertici $(0, 0)$, $(-2, 2)$, $(2, 2)$ e $(2, 0)$. (Indicazione: occorre dividere l'area d'integrazione in due pezzi.)



C. Sia $R > 0$ un parametro fisso, e sia \mathcal{S} la sfera definita da $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Usare le coordinate cilindriche e calcolare la media di e^z su \mathcal{S} .

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d}{1} + \frac{e}{2} + \frac{f}{3} &= 12 \\ \frac{d}{2} + \frac{e}{3} + \frac{f}{4} &= 0 \\ \frac{d}{4} + \frac{e}{5} + \frac{f}{6} &= -12 \end{aligned}$$

(Indicazione: alla fine non ci sono denominatori nella soluzione.)

p. 1/9

[A]

$$y = x^2$$

$$dy = 2x dx$$

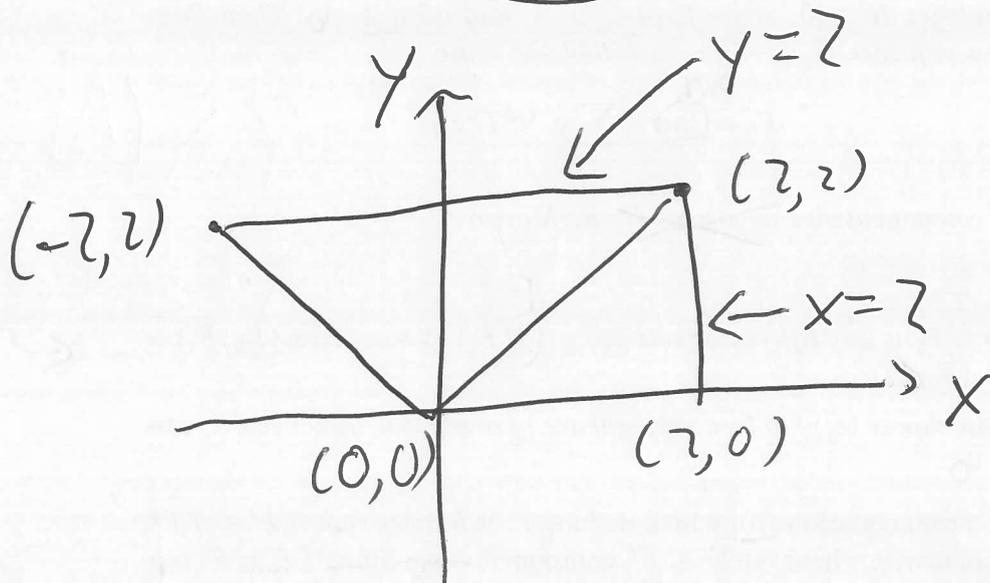
$$\int \frac{x^5}{x^6 - x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^4}{x^6 - x^2} 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{y^2}{y^3 - y} dy = \frac{1}{2} \int \frac{y}{y^2 - 1} dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \log(y^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{4} \log(y^2 - 1) = \frac{1}{4} \log(x^4 - 1)$$

p. 2/9



$$y=2 \rightsquigarrow r \sin \theta = 2 \rightsquigarrow r = 2 / \sin \theta$$

$$x=2 \rightsquigarrow r \cos \theta = 2 \rightsquigarrow r = 2 / \cos \theta$$

$\iint_{\text{Quadrilatero}} 1 \, dA$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/4} \left(\int_{r=0}^{2/\cos \theta} 1 \cdot r \, dr \right) d\theta$$

$$+ \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_{r=0}^{2/\sin \theta} 1 \cdot r \, dr \right) d\theta$$

P. 3/9

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\cos \theta} \right)^2 d\theta$$

$$+ \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sin \theta} \right)^2 d\theta$$

$$= 2 \int_{\theta=0}^{\pi/4} \sec^2 \theta d\theta$$

$$+ 2 \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} \csc^2 \theta d\theta$$

$$= 2 \left[\tan \theta \right]_{\theta=0}^{\pi/4} + 2 \left[-\cot \theta \right]_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= 2(1-0) + 2(-(-1)-(-1))$$

$$= 2 + 4 = \textcircled{6}$$

P. 4/9

$$\begin{aligned} \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 &\leq R^2 \sim r^2 + z^2 \leq R^2 \\ \rightarrow r^2 &\leq R^2 - z^2 \rightarrow r \leq \sqrt{R^2 - z^2} \end{aligned}$$

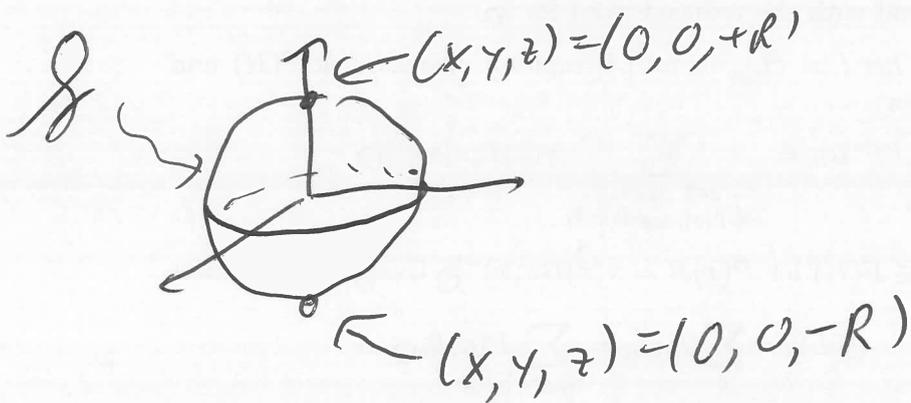
$$\iiint_{\mathcal{G}} 1 \, dV = 4\pi R^3/3$$

$$\begin{aligned} &\iiint_{\mathcal{G}} e^z \, dV \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{z=-R}^{+R} \left(\int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} e^z \cdot r \, dr \right) dz \right) d\theta \end{aligned}$$

$$= 2\pi \left(\int_{z=-R}^{+R} e^z \cdot \frac{1}{2} (R^2 - z^2) \, dz \right)$$

$$= \pi \int_{z=-R}^{+R} R^2 e^z - z^2 e^z \, dz$$

p. 5/9



$$\int z^2 e^z dz = z^2 e^z - \int (2z) e^z dz$$

$$= z^2 e^z - 2z e^z + \int (2) e^z dz$$

$$= z^2 e^z - 2z e^z + 2e^z$$

┘

$$\iiint_g e^z dV$$

$$= \pi \left(\left[R^2 e^z \right]_{z=-R}^{+R} - \left[z^2 e^z - 2z e^z + 2e^z \right]_{z=-R}^{+R} \right)$$

p. 6/9

$$= \pi \left(\begin{array}{l} R^2 e^R - (R^2 e^R - 2R e^R + 2e^R) \\ -R^2 e^{-R} + (R^2 e^{-R} + 2R e^{-R} - 2e^{-R}) \end{array} \right)$$

$$= \pi (2R(e^R + e^{-R}) - 2(e^R - e^{-R}))$$

$$= 2\pi (R(e^R + e^{-R}) - (e^R - e^{-R}))$$

$$\overline{e^z} = \frac{2\pi (R(e^R + e^{-R}) - (e^R - e^{-R}))}{4\pi R^3 / 3}$$

$$= \frac{3}{2R^3} (R(e^R + e^{-R}) - (e^R - e^{-R}))$$

$$= \frac{3}{R^3} (R \cosh R - \sinh R)$$

P. 7/9

d	e	f	=
①	1/2	1/3	12
1/2	1/3	1/4	0
1/4	1/5	1/6	-12

$$E2 \leftarrow E2 - \frac{1}{2} E1$$

$$E3 \leftarrow E3 - \frac{1}{4} E1$$

①	1/2	1/3	12	
0	① 1/2	1/12	-6	$E2 \leftarrow 12 E2$
0	3/40	1/12	-15	

①	1/2	1/3	12	$E1 \leftarrow E1 - \frac{1}{2} E2$
0	①	1	-72	$E3 \leftarrow E3 - \frac{3}{40} E2$
0	3/40	1/12	-15	

p. 8/9

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 0 & -1/6 & 48 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & -72 \\ 0 & 0 & \textcircled{1/120} & -48/5 \end{array} \quad \begin{array}{l} E3 \leftarrow 120 \cdot E3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 0 & -1/6 & 48 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & -72 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1152 \end{array} \quad \begin{array}{l} E1 \leftarrow E1 + \frac{1}{6} E3 \\ \hline E2 \leftarrow E2 - E3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & -144 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 1080 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1152 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d = -144 \\ e = 1080 \\ f = -1152 \end{array}$$

P. 9/9

Controllo:

$$-\frac{144}{1} + \frac{1080}{2} - \frac{1152}{3}$$

$$= -144 + 540 - 384 = 12$$

$$-\frac{144}{2} + \frac{1080}{3} - \frac{1152}{4}$$

$$= -72 + 360 - 288 = 0$$

$$-\frac{144}{4} + \frac{1080}{5} - \frac{1152}{6}$$

$$= -36 + 216 - 192 = -12$$