

DA FOTOCOPIARE

**Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)**

**Prova Scritta di 13 luglio 2020**

- Non si copia da nessuno.
- Non si chiede aiuto a nessuno; non si ottiene aiuto da nessuno.
- Ogni compito deve essere accompagnato da una dichiarazione (dettagli sotto) e di una riproduzione della Carta d'Identità.
- La durata della prova è di 3 ore, più 1 ora per mettere insieme tutto e spedirmelo. Quindi, l'esame comincia alle 10.00 e accetterò consegne fino alle 14.00.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

In quanto l'esame è svolto in remoto, si può:

- far riferimento ad un libro di testo;
- far riferimento agli appunti;
- utilizzare una calcolatrice;
- oppure un calcolatore.

Per consegnare il compito, si deve scannerizzare il lavoro (se questo è possibile) o fotografarlo, e spedirmelo per posta elettronica. Inoltre:

- Come prima pagina o prime due pagine, si deve includere la carta d'identità, appositamente scannerizzata o fotografata.
- Dopodiché si deve includere questa dichiarazione:

La sottoscritta/il sottoscritto . . . dichiara che il lavoro qui consegnato è il suo lavoro, che non ha copiato da nessuno, e che non ha né chiesto né ottenuto aiuto da nessuno.

con tanto di firma, data, e luogo.

- Ogni pagina deve avere un numero di pagina sotto e una firma di lato.
- Per favore, mettete le soluzioni in ordine: prima la soluzione dell'Esercizio A, poi la soluzione dell'Esercizio B, ecc.
- Se si spedisce il compito come risposta al messaggio del docente, stia attento a rispondere *solo al docente*, non a tutti.

Alcune osservazioni:

- Per essere sufficiente, un compito deve avere buone soluzioni ad almeno 2 dei 4 esercizi, di cui almeno uno deve essere Esercizio B o Esercizio C.
- Se qualcuno vuol far valere il lavoro svolto su un Esercizio A e/o un Esercizio D di un appello precedente, dovrebbe includere un'indicazione a proposito su questo compito.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad dx dy dz = r dr d\theta dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

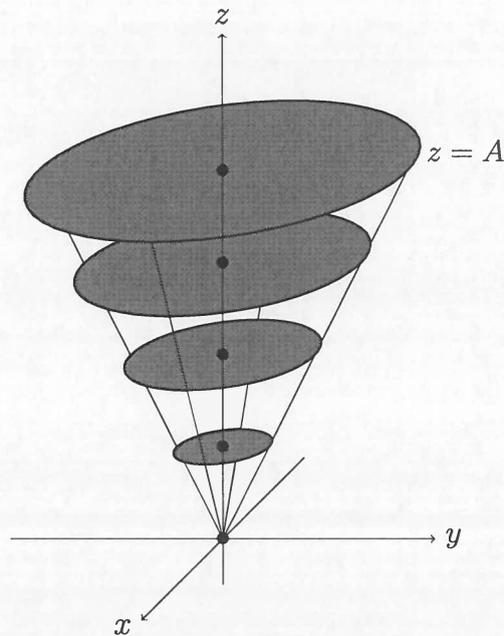
$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \\ dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

A. Calcolare

$$\int \frac{t^4}{t^3 - 8} dt$$

B. Siano  $A, R > 0$  due parametri costanti. Sia  $\mathcal{C}$  il cono con vertice all'origine, con asse centrale nella direzione dell'asse  $z$  positivo, e con soffitto che è un disco di raggio  $R$  che si trova al livello  $z = A$ . Usare le coordinate *cilindriche* e calcolare:

$$\iiint_{\mathcal{C}} e^z dV$$



C. Rifare il calcolo di Esercizio B con le coordinate *sferiche*.

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema:

$$\begin{array}{rcccccc} p & +q & +2r & +3s & +6t & +3u & = 0 \\ 2p & +2q & +3r & +4s & +3t & +u & = 0 \\ 3p & +3q & +4r & +5s & +t & & = 0 \\ 4p & +4q & +5r & +6s & & & = 0 \\ 5p & +5q & +6r & +7s & & +u & = 0 \\ 6p & +6q & +7r & +8s & +t & +3u & = 0 \end{array}$$

$t^4$	$t^3 - 8$
$t^4 - 8t$	$t$
$8t$	

$$t^4 = t(t^3 - 8) + 8t$$

$$\frac{t^4}{t^3 - 8} = t + \frac{8t}{t^3 - 8}$$

$t^3$	$-8$	$t - 2$
$t^3 - 2t^2$		$t^2 + 2t + 4$
$2t^2$	$-8$	
$2t^2 - 4t$		
	$4t - 8$	
	$4t - 8$	
	$//$	

$$t^3 - 8 = (t - 2)(t^2 + 2t + 4)$$

P. 2/13

$$t^2 + 2t + 4 \rightsquigarrow \Delta = \text{discriminante} \\ = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = \del{12} - 12 \\ < 0$$

$$\frac{8t}{t^3 - 8} = \frac{A}{t - 2} + \frac{B}{t^2 + 2t + 4} + \frac{C(2t + 2)}{t^2 + 2t + 4}$$

$$8t = A(t^2 + 2t + 4) + B(t - 2) \\ + C(2t + 2)(t - 2)$$

$$t = 2 \rightsquigarrow 16 = A(2^2 + 2 \cdot 2 + 4) + 0 + 0 \\ \rightsquigarrow 16 = A \cdot 12 \rightsquigarrow \boxed{A = 4/3}$$

$$8t = A(t^2 + 2t + 4) \\ + B(t - 2) \\ + C(2t^2 - 2t - 4) \\ = (A + 2C)t^2 + (2A + B - 2C)t \\ + (4A - 2B - 4C)$$

2. 3/13

$$\begin{cases} A + 2C = 0 \\ 2A + B - 2C = 8 \\ 4A - 2B - 4C = 0 \end{cases}$$

$C = -2/3$

$2C = -A = -4/3$

$$\begin{cases} B - 2C = -2A + 8 = -8/3 + 8 = 16/3 \\ -2B - 4C = -4A = -16/3 \end{cases}$$

$$B = 2C + 16/3 = -4/3 + 16/3 = 12/3 = 4$$

$$-2B = 4C - 16/3 = -8/3 - 16/3 = -24/3 = -8$$

$B = 4$

$$\int \frac{t^4}{t^3 - 8} dt =$$

$$\int t + \frac{4}{3} \frac{1}{t-2} + 4 \frac{1}{t^2 + 2t + 4} - \frac{2}{3} \frac{(2t+2)}{t^2 + 2t + 4} dt$$

P. 5/13

$$= 2\pi \int_{z=0}^A e^z \left( \int_{n=0}^{\frac{R}{A} z} n \, dn \right) dz$$

$$= 2\pi \int_{z=0}^A e^z \frac{1}{2} \left( \frac{R}{A} z \right)^2 dz$$

$$= \frac{\pi R^2}{A^2} \int_{z=0}^A e^z z^2 dz$$

$$= \frac{\pi R^2}{A^2} \left( e^z z^2 \right)_{z=0}^A - \int_{z=0}^A e^z (2z) dz$$

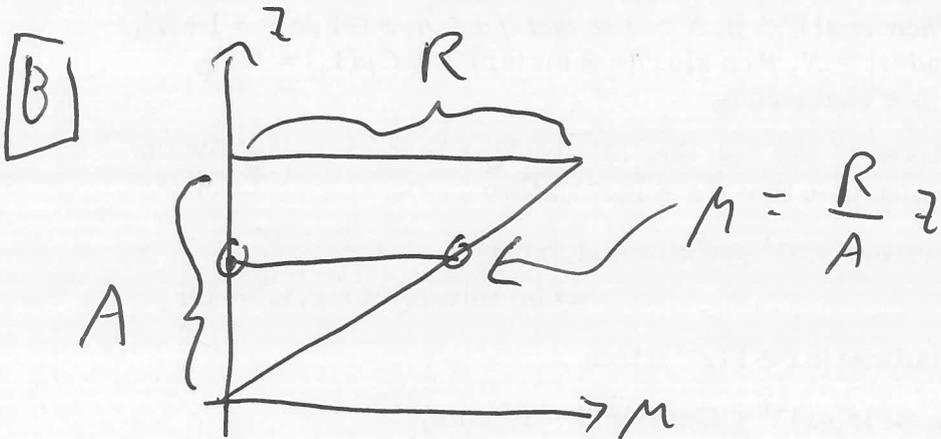
$$= \frac{\pi R^2}{A^2} \left( e^A A^2 - 2e^z z \right)_{z=0}^A + 2 \int_{z=0}^A e^z dz$$

$$= \frac{\pi R^2}{A^2} \left( e^A A^2 - 2e^A A + 2e^z \right)_{z=0}^A$$

p. 4/13

$$= \frac{t^2}{2} + \frac{4}{3} \log(t-2) + 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{12}} \arctan\left(\frac{2t+2}{\sqrt{12}}\right) - \frac{2}{3} \log(t^2+2t+4)$$

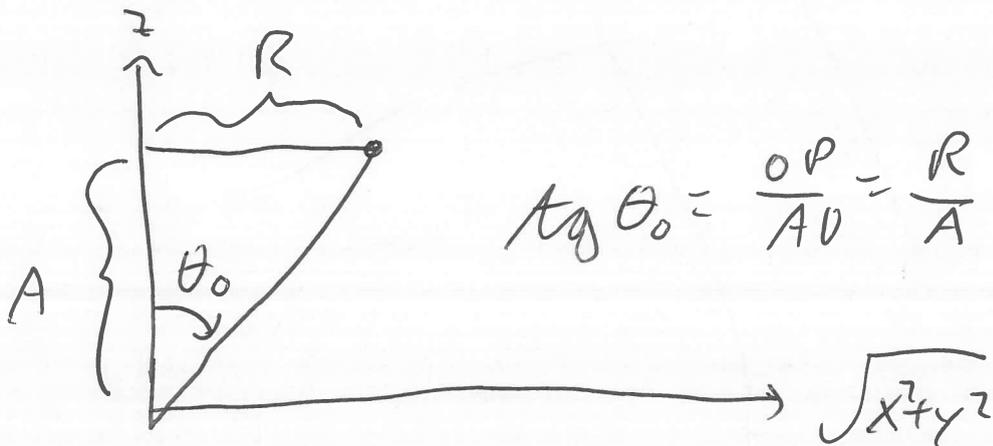
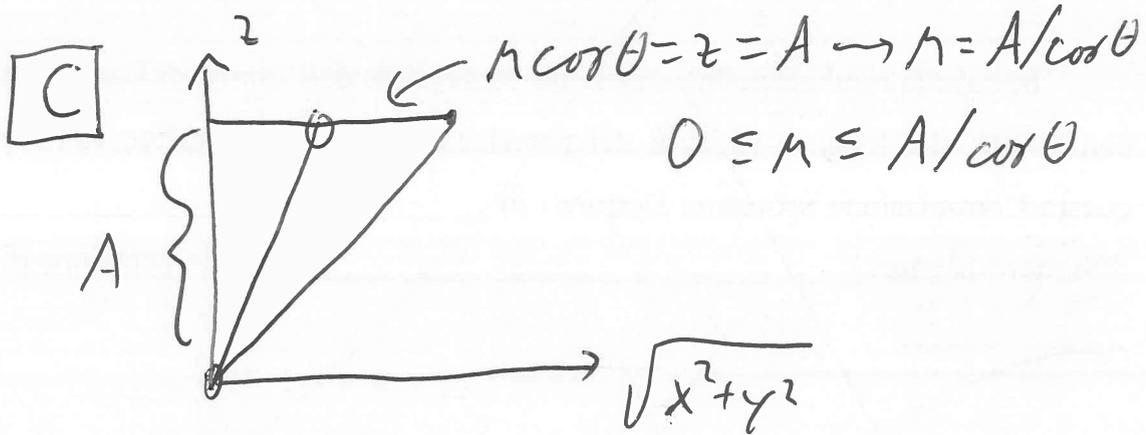
$$= \left( \frac{t^2}{2} + \frac{4}{3} \log(t-2) + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{3} \log(t^2+2t+4) \right)$$



$$0 \leq m \leq \frac{R}{A} z$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} e^z dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{z=0}^A \left( \int_{m=0}^{\frac{R}{A} z} e^z m dm \right) dz \right) d\theta$$

$$= \frac{\pi R^2}{A^2} (e^A A^2 - 2e^A A + 2e^A - 2)$$



$$\iiint e^z dV$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \int_{m=0}^{A/\cos\theta} e^{m \cos \theta} \cdot m^2 \cos \theta \, dm \, d\theta \, d\phi$$

p. 7/13

$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta_0} \sin \theta \left( \int_{m=0}^{A/\cos \theta} e^{m \cos \theta} m^2 dm \right) d\theta$$

$$\int_{m=0}^{A/\cos \theta} e^{m \cos \theta} m^2 dm$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} \left[ e^{m \cos \theta} m^2 \right]_{m=0}^{A/\cos \theta} - \frac{1}{\cos \theta} \int_{m=0}^{A/\cos \theta} e^{m \cos \theta} (2m) dm$$

$$= \frac{A^2}{\cos^3 \theta} e^A - \left[ \frac{2}{\cos \theta} \frac{1}{\cos \theta} e^{m \cos \theta} m \right]_{m=0}^{A/\cos \theta}$$

$$+ \frac{2}{\cos^2 \theta} \int_{m=0}^{A/\cos \theta} e^{m \cos \theta} dm$$

$$= \frac{A^2}{\cos^3 \theta} e^A - \frac{2A}{\cos^3 \theta} e^A + \left[ \frac{2}{\cos^3 \theta} e^{m \cos \theta} \right]_{m=0}^{A/\cos \theta}$$

$$= \frac{A^2}{\cos^3 \theta} e^A - \frac{2A}{\cos^3 \theta} e^A + \frac{2}{\cos^3 \theta} e^A - \frac{2}{\cos^3 \theta}$$

P. 8/13

$$= \frac{1}{\cos^3 \theta} (A^2 e^A - 2A e^A + 2e^A - 2)$$

$$\iiint e^z dV$$

$$= 2\pi (A^2 e^A - 2A e^A + 2e^A - 2)$$

$$\int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{1}{\cos^3 \theta} \sec \theta d\theta$$

$$\int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{1}{\cos^3 \theta} \sec \theta d\theta = \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \theta} \right]_{\theta=0}^{\theta_0}$$

$$= \frac{1}{2} (\sec^2 \theta_0 - 1) = \frac{1}{2} \tan^2 \theta_0$$

$$= \frac{1}{2} \frac{R^2}{A^2}$$

$$\iiint e^z dV = \frac{\pi R^2}{A^2} (A^2 e^A - 2A e^A + 2e^A - 2)$$

p. 9/13

p	q	m	s	-t	u = 0
①	1	2	3	6	3
2	2	3	4	3	1
3	3	4	5	1	0
4	4	5	6	0	0
5	5	6	7	0	1
6	6	7	8	1	3

$E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1$       $E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1$       $\rightarrow$   
 $E_4 \leftarrow E_4 - 4E_1$       $E_5 \leftarrow E_5 - 5E_1$       $E_6 \leftarrow E_6 - 6E_1$

①	1	2	3	6	3
0	①	①	-2	-9	-5
0	0	-2	-4	-17	-9
0	0	-3	-6	-24	-12
0	0	-4	-8	-30	-14
0	0	-5	-10	-35	-15

$\underline{E_2 \leftarrow -E_2} \rightarrow$

p. 10/13

①	1	2	3	6	3
0	0	①	2	9	5
0	0	-2	-4	-17	-9
0	0	-3	-6	-24	-12
0	0	-4	-8	-30	-14
0	0	-5	-10	-35	-15

$E_1 \leftarrow E_1 - 2E_2$      $E_3 \leftarrow E_3 + 2E_2$      $E_4 \leftarrow E_4 + 3E_2$   
 $E_5 \leftarrow E_5 + 4E_2$      $E_6 \leftarrow E_6 + 5E_2$

①	1	0	-1	-12	-7
0	0	①	2	9	5
0	0	0	① → ①	1	1
0	0	0	0	3	3
0	0	0	0	6	6
0	0	0	0	10	10

P. 11/13

$$\begin{array}{l} E1 \leftarrow E1 + 17E3 \quad E2 \leftarrow E2 - 9E3 \\ E4 \leftarrow E4 - 3E3 \quad E5 \leftarrow E5 - 6E3 \quad E6 \leftarrow E6 - 10E3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \textcircled{1} & 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$p \quad q \quad m \quad s \quad t \quad u = 0$$

$$\textcircled{p} + q - s + 5u = 0$$

$$\textcircled{m} + 2s - 4u = 0$$

$$\textcircled{t} + u = 0$$

$$p = -q + s - 5u$$

$$m = -2s + 4u$$

$$t = -u$$

P-12/13

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q + s - 5u \\ q \\ -2s + 4u \\ s \\ -u \\ u \end{pmatrix}$$

$$= q \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

p. 13/13

Controllo della 6<sup>a</sup> equazione:

$$\begin{aligned} & 6p + 6q + 7m + 8s + t + 3u \\ &= 6(-q + s - 5u) \\ & \quad + 6(q) \\ & \quad + 7(-2s + 4u) \\ & \quad + 8(s) \\ & \quad + (-u) \\ & \quad + 3(u) \\ &= (6-6)q + (6-14+8)s \\ & \quad \quad \quad + (-30+28-1+3)u \\ &= 0 + 0 + 0 = 0 \quad (\checkmark) \end{aligned}$$