Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 19 giugno 2020

Le regole di base:

- Non si copia da nessuno.
- Non si chiede aiuto a nessuno; non si ottiene aiuto da nessuno.
- La durata della prova è di 3 ore, più 1 ora per mettere insieme tutto e spedirmelo. Quindi, l'esame comincia alle 10.00 e accetterò consegne fino alle 14.00
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

In quanto l'esame è svolto in remoto, si può:

- far riferimento ad un libro di testo;
- far riferimento agli appunti;
- utilizzare una calcolatrice;
- oppure un calcolatore.

Per consegnare il compito, si deve scannerizzare il lavoro (se questo è possibile) o fotografarlo, e spedirmelo per posta elettronica. Inoltre:

- Come prima pagina o prime due pagine, si deve includere la carta d'identità, appositamente scannerizzata o fotografata.
- Dopodiché si deve includere questa dichiarazione:

  > La sottoscritta/il sottoscritto . . . dichiara che il lavoro qui consegnato è il suo lavoro, che non ha copiato da nessuno, e che non ha né chiesto né ottenuto aiuto da nessuno.

con tanto di firma, data, e luogo.

- Ogni pagina deve avere un numero di pagina sopra e una firma di lato.
- Per favore, mettete le soluzioni in ordine: prima la soluzione dell'Esercizio A, poi la soluzione dell'Esercizio B, ecc.

Alcune osservazioni:

- Per essere sufficiente, un compito deve avere buone soluzioni ad almeno 2 dei 4 esercizi, di cui almeno uno deve essere Esercizio B o Esercizio C.
- Se qualcuno vuol far valere il lavoro svolto su un Esercizio A e/o un Esercizio D di un appello precedente, dovrebbe includere un'indicazione a proposito su questo compito.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \qquad\qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

A. Calcolare

$$\int \frac{q^4}{(q^2-1)(q^2-4)(q^2-9)}\,dq$$

B. Sia $R > 0$ un parametro fisso. Sia $\mathcal{D}_1$ il disco definito da:

$$(x-R)^2 + y^2 \leq R^2$$

Fare una figura di $\mathcal{D}_1$ e poi usare le coordinate polari e calcolare la media di x^3 su $\mathcal{D}_1$.

C. Sia $\mathcal{F}$ la forma definita da:

$$0 \leq z \leq 1 \qquad\qquad |x| \leq z \qquad\qquad |y| \leq z$$

Usare le coordinate Cartesiane (x, y, e z) e calcolare il volume di $\mathcal{F}$ e la media di z^2 su $\mathcal{F}$.

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema

$$\begin{array}{llll} A & +2B & +3C & = x \\ A & +3B & +6C & = y \\ A & +4B & +10C & = z \end{array}$$

per le incognite A, B, e C in termini dei parametri x, y, e z.

$\boxed{A}$ $$\frac{q^4}{(q^2-1)(q^2-4)(q^2-9)} = \frac{q^4}{(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)(q+3)}$$

$$= \frac{A}{q-1} + \frac{B}{q+1} + \frac{C}{q-2} + \frac{D}{q+2} + \frac{E}{q-3} + \frac{F}{q+3}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow q^4 = {} & A(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)(q+3) \\ & + B(q-1)(q-2)(q+2)(q-3)(q+3) \\ & + C(q-1)(q+1)(q+2)(q-3)(q+3) \\ & + D(q-1)(q+1)(q-2)(q-3)(q+3) \\ & + E(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q+3) \\ & + F(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3) \end{aligned}$$

$q=1$ $\rightsquigarrow 1 = A(2)(-1)(3)(-2)(4)$

$\rightarrow A = 1/48$

$q=2$ $\rightsquigarrow 16 = C(1)(3)(4)(-1)(5)$

$\rightsquigarrow C = -4/15$

$q=3 \rightsquigarrow 81 = E(2)(4)(1)(5)(6)$

$\rightarrow E = 27/80$

$q=-1 \rightsquigarrow 1 = B(-2)(-3)(1)(-4)(2)$

$\rightsquigarrow B = -1/48$

$q=-2 \rightsquigarrow 16 = D(-3)(-1)(-4)(-5)(1)$

$\rightsquigarrow D = 4/15$

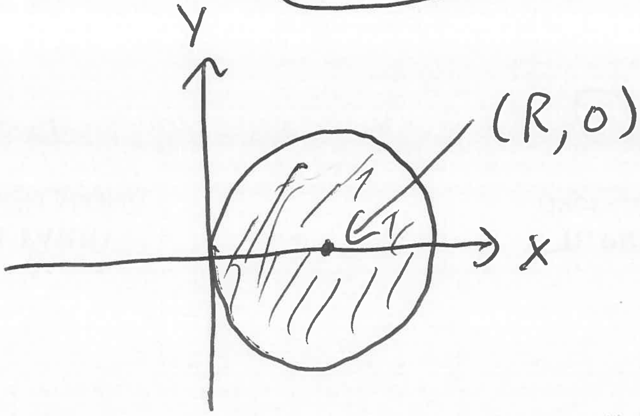
$q=-3 \rightsquigarrow 81 = F(-4)(-2)(-5)(-1)(-6)$

$\rightsquigarrow F = -27/80$

$$\int \frac{1}{48}\frac{1}{q-1} - \frac{1}{48}\frac{1}{q+1} - \frac{4}{15}\frac{1}{q-2} + \frac{4}{15}\frac{1}{q+2} + \frac{27}{80}\frac{1}{q-3} - \frac{27}{80}\frac{1}{q+3}\,dq$$

$$= \boxed{\frac{1}{48}\log(q-1) - \frac{1}{48}\log(q+1) - \frac{4}{15}\log(q-2) + \frac{4}{15}\log(q+2) + \frac{27}{80}\log(q-3) - \frac{27}{80}\log(q+3)}$$

$\boxed{B}$



$$(x-R)^2+y^2 \le R^2 \rightsquigarrow x^2-2Rx+R^2+y^2 \le R^2$$

$$\rightsquigarrow x^2+y^2 \le 2Rx \rightsquigarrow r^2 \le 2Rr\cos\theta$$

$$\rightsquigarrow r \le 2R\cos\theta$$

$$0 \le r \le 2R\cos\theta \to 0 \le 2R\cos\theta$$

$$\to 0 \le \cos\theta \to -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$$

$$\iint_{D_1} x^3\, dA = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{2R\cos\theta} (r\cos\theta)^3\, r\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta \cdot \frac{(2R\cos\theta)^5}{5}\, d\theta$$

p. 4/8

$$= \frac{32R^5}{5} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8\theta \, d\theta$$

$$\left[\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8\theta \, d\theta = \frac{1}{8} \operatorname{sen}\theta \cos^7\theta \Big]_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{7}{8} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6\theta \, d\theta \right.$$

$$= \frac{7}{8} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6\theta \, d\theta = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$\left. = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, d\theta = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \pi \right]$$

$$= \frac{32R^5}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \pi = \frac{21\pi R^5}{12}$$

$$= \frac{7\pi R^5}{4}$$

p. 5/8

$$\overline{x^3} = \frac{\iint_{Q_1} x^3\, dA}{\iint_{Q_1} 1\, dA} = \frac{7\pi R^5/4}{\pi R^2}$$

$$= \frac{7R^3}{4}$$

$\boxed{C}$ Pen $z \geq 0$

$|x| \leq z \rightsquigarrow -z \leq x \leq z$

$|y| \leq z \rightsquigarrow -z \leq y \leq z$

$$\iiint_{\mathcal{E}} 1\, dV$$

$$= \int_{z=0}^{1} \left(\int_{x=-z}^{z} \left(\int_{y=-z}^{z} 1\, dy \right) dx \right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{1} \left(\int_{x=-z}^{z} 2z\, dx \right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{1} (2z)^2\, dz = \frac{4}{3} z^3 \Big]_{z=0}^{1} = \frac{4}{3}$$

P. 6/8

$$\iiint_{\mathcal{J}} z^2 \, dV$$

$$= \int_{z=0}^{1} \left(\int_{x=-z}^{z} \left(\int_{y=-z}^{z} z^2 \, dy \right) dx \right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{1} \left(\int_{x=-z}^{z} 2z^3 \, dx \right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{1} 4z^4 \, dz = \frac{4}{5} z^5 \Big]_{z=0}^{1} = \frac{4}{5}$$

$$\overline{z^2} = \iiint_{\mathcal{J}} z^2 \, dV \Big/ \iiint_{\mathcal{J}} 1 \, dV$$

$$= \frac{4/5}{4/3} = \frac{3}{5}$$

$\boxed{D}$

A	B	C	=	x	y	z
1	2	3		1	0	0
1	3	6		0	1	0
1	4	10		0	0	1

p. 8/8

Controllo: $A + 2B + 3C = 6x - 8y + 3z$
$+ 2(-4x + 7y - 3z)$
$+ 3(x - 2y + z)$
$= x$

$A + 3B + 6C = 6x - 8y + 3z$
$+ 3(-4x + 7y - 3z)$
$+ 6(x - 2y + z)$
$= y$

$A + 4B + 10C = 6x - 8y + 3z$
$+ 4(-4x + 7y - 3z)$
$+ 10(x - 2y + z)$
$= z$

p. 7/8

$$\xrightarrow[E3 \leftarrow E3-E1]{E2 \leftarrow E2-E1}\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[E3 \leftarrow E3-2E2]{E1 \leftarrow E1-2E2}\begin{matrix} 1 & 0 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[E2 \leftarrow E2-3E3]{E1 \leftarrow E1+3E3}\begin{array}{cccccc} A & B & C = & x & y & z \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} A &= 6x-8y+3z \\ B &= -4x+7y-3z \\ C &= x-2y+z \end{aligned}$$