DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 6 febbraio 2020

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione lunedì 10 ottobre, alle 11.30, al 1° piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

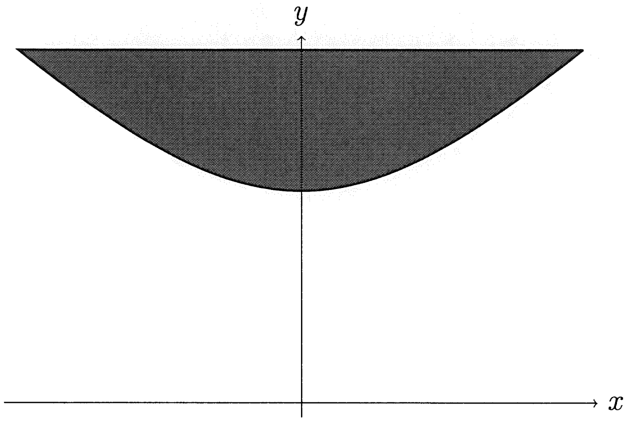
$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\, dy\, dz = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

A. Usare la sostituzione $x = e^t$ e calcolare

$$\int \frac{1}{e^{2t} + 3e^t + 2}\, dt$$

B. Usare le coordinate rettangolari (Cartesiane) e calcolare l'area della zona $\mathcal{Z}$ definita da

$$0 \leq y \leq 5 \qquad\qquad y^2 - x^2 \geq 9$$



C. Sia $R > 0$ un parametro fisso. Usare le coordinate sferiche e calcolare la media di $y^2 z^2$ sulla sfera $\mathcal{S}$ definita da $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

D. Sia a un parametro fisso. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 1 \\ x & +2y & +4z & = 8 \\ x & +ay & +a^2 z & = a^3 \end{array}$$

(Indicazione: se si procede con cura, i denominatori possono essere evitati nell'intero calcolo.)

$\boxed{A}$ $x = e^t$

$dx = e^t\, dt$
$dt = dx/e^t = dx/x$

$$\int \frac{1}{e^{2t} + 3e^t + 2}\, dt = \int \frac{1}{x^2+3x+2} \frac{dx}{x}$$

$$= \int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\, dx$$

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$1 = A(x+1)(x+2) + B(x)(x+2) + C(x)(x+1)$$

$x=0 \rightarrow 1 = A \cdot 1 \cdot 2 + 0 + 0 \rightsquigarrow A = 1/2$

$x=-1 \rightsquigarrow 1 = 0 + B(-1)(1) + 0 \rightsquigarrow B = -1$

$x=-2 \rightsquigarrow 1 = 0 + 0 + C(-2)(-1) \rightarrow C = 1/2$

$$\int \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log x - \log(x+1) + \frac{1}{2}\log(x+2)$$

$$= \frac{1}{2}\log e^t - \log(e^t+1) + \frac{1}{2}\log(e^t+2)$$

$$= \frac{1}{2}t - \log(e^t+1) + \frac{1}{2}\log(e^t+2)$$

$\boxed{B}$ $y^2 - x^2 \geq 9 \rightsquigarrow y^2 \geq x^2 + 9$

$\rightsquigarrow$ (poiché $y \geq 0$) $y \geq \sqrt{x^2+9}$

$\sqrt{x^2+9} \leq y \leq 5$

$\sqrt{x^2+9} \leq 5 \rightsquigarrow x^2+9 \leq 25$

$\rightsquigarrow x^2 \leq 16$

$\rightsquigarrow |x| \leq 4$

$\rightsquigarrow -4 \leq x \leq 4$

$$\iint_{\mathcal{Z}} 1\,dA = \int_{x=-4}^{+4} \left(\int_{y=\sqrt{x^2+9}}^{5} 1 \, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=-4}^{4} 5 - \sqrt{x^2+9} \; dx$$

$$\downarrow \quad \int \sqrt{x^2+9} \, dx$$

$$x = 3 \operatorname{tg} \theta$$

$$dx = 3 \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$x^2+9 = 9(\operatorname{tg}^2\theta + 1) = 9 \sec^2 \theta$$

$$\sqrt{x^2+9} = 3 \sec \theta$$

$$= \int 3\sec\theta \cdot 3\sec^2\theta \, d\theta$$

$$= 9 \int \sec^3 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \operatorname{tg}\theta \sec\theta + \frac{9}{2} \log(\operatorname{tg}\theta + \sec\theta)$$

$$= \frac{9}{2} \frac{x}{3} \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{9}{2} \log\left(\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2} \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2+9}}{3}\right)$$

$$\int_{x=-4}^{+4} 5 - \sqrt{x^2+9}\, dx$$

$$= 8 \cdot 5 - \left[\left(\frac{1}{2} x\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+9}}{3}\right)\right)\right]_{x=-4}^{x=+4}$$

$$= 40 - \left(\frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 5 + \frac{9}{2}\log\left(\frac{4+5}{3}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}(-4)\cdot 5 - \frac{9}{2}\log\left(\frac{-4+5}{3}\right)\right)$$

$$= 40 - \left(\begin{array}{l} 10 + 9/2 \log(3) \\ +10 - 9/2 \log(1/3) \end{array}\right)$$

$$= 20 - 9/2 \log(3) - 9/2 \log(3)$$
$$= 20 - 9 \log(3)$$

$\boxed{C}$ $y^2 z^2 = (\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi)^2 (\rho \cos\theta)^2$

$$= \rho^4 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta$$

p. 5 / 10

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \le R^2} 1 \, dV = \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \le R^2} y^2 z^2 \, dV$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^{R} r^4 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^{R} r^6 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^3\theta \cos^2\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta \cos^2\theta \, d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, (1-\cos^2\theta)\cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta \cos^4\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{\cos^3\theta}{3}\Big]_{\theta=0}^{\pi} + \frac{\cos^5\theta}{5}\Big]_{\theta=0}^{\pi}$$

$$= \frac{-(-1)^3}{3} - \left(\frac{-(1)^3}{3}\right) + \frac{(-1)^5}{5} - \frac{(1)^5}{5}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \Big]$$

$$\Big[\int_{\varphi=0}^{2\pi} \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi = \left[-\frac{1}{2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi}$$

$$= (0+\pi) - (0+0) = \pi \Big]$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{R^7}{7} \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^3\theta \cos^2\theta \, d\theta \right) d\varphi$$

$$= \frac{R^7}{7} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{4}{15} \operatorname{sen}^2\varphi \; d\varphi$$

$$= \frac{4R^7}{7 \cdot 15} \cdot \pi = \frac{4\pi R^7}{7 \cdot 15}$$

p. 7/10

$$\overline{y^2 z^2} = \frac{4\pi R^7 / 7\cdot 15}{4\pi R^3 / 3} = \frac{3}{7\cdot 15} R^4$$

$$= \frac{1}{7\cdot 5} R^4 = \frac{R^4}{35}$$

$\boxed{D}$

$$\begin{array}{cccc}
x & y & z & = \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 4 & 8 \\
1 & a & a^2 & a^3.
\end{array}$$

E2←E2−E1

E3←E3−E1

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 3 & 7 \\
0 & a-1 & a^2-1 & a^3-1
\end{array}$$

p. 8/10

$$\begin{cases} E1 \leftarrow E1 - E2 \\ E3 \leftarrow E3 - (a-1)E2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & a^2-1-3(a-1) & (a^3-1)-7(a-1) \end{matrix}$$

[$a^2-1-3(a-1) = (a-1)(a+1)-3(a-1)$

$= (a-1)(a+1-3) = (a-1)(a-2)$

$a^3-1-7(a-1)$

$= (a-1)(a^2+a+1-7) = (a-1)(a^2+a-6)$

$= (a-1)(a+3)(a-2)$]

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (a-1)(a+3)(a-2) \end{matrix}$$

$E3 \leftarrow \frac{1}{(a-1)(a-2)} E3$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & a+3 \end{matrix}$$

$E1 \leftarrow E1 + 2E3$
$E2 \leftarrow E2 - 2E3$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -6+2(a+3) = 2a \\ 0 & 1 & 0 & 7-3(a+3) = -3a-2 \\ 0 & 0 & 1 & a+3 \end{matrix}$$

$x = 2a$
$y = -3a-2$
$z = a+3$

p. 10/10

Controllo:

$x+y+z = 2a + (-3a-2) + (a+3) = 1$

$x+2y+4z = 2a + (-6a-4) + (4a+12) = 8$

$x+ay+a^2z = 2a + (-3a^2-2a) + (a^3+3a^2) = a^3$