DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 9 settembre 2019

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione mercoledì 11 settembre, alle 9.30, al 1° piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

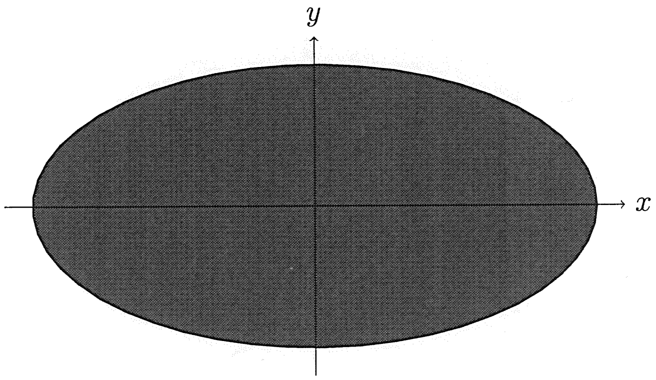
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

A. Usare la sostituzione $x = \mathrm{tg}\,\theta$ e calcolare

$$\int \frac{1}{3+\sec^2\theta}\,d\theta$$

B. Usare le coordinate rettangolari (Cartesiane) e calcolare l'area dell'ellisse data da

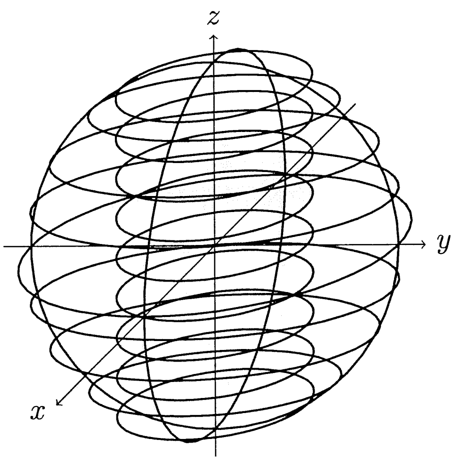
$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$$



C. Usare le coordinate *cilindriche* e calcolare il volume della forma definita da:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \qquad\qquad x^2 + y^2 \leq 1$$

Indicazioni: il volume d'interesse è l'intersezione. Conviene che la prima integrale da svolgere sia l'integrale dz.



D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema:

$$\begin{array}{rrrrl} A & +3B & +6C & +10D & = 4 \\ 3A & +6B & +10C & +15D & = 1 \\ 6A & +10B & +15C & +21D & = 0 \\ 10A & +15B & +21C & +28D & = 1 \end{array}$$

(Indicazione: nella risposta finale non ci sono denominatori.)

$\boxed{A}$ $x = tg\,\theta$

$dx = sec^2\theta \, d\theta$

$sec^2\theta = tg^2\theta + 1 = x^2 + 1$

$$\int \frac{1}{3+sec^2\theta}\, d\theta = \int \frac{1}{3+sec^2\theta} \frac{1}{sec^2\theta} sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{4+x^2} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\frac{1}{4+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{A}{4+x^2} + \frac{B}{1+x^2}$$

$$1 = A(1+x^2) + B(4+x^2)$$
$$= (A+B)x^2 + (A+4B)$$

$$\rightsquigarrow \begin{matrix} A+B=0 \\ A+4B=1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} A+B=0 \\ 3B=1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} B=1/3 \\ A=-1/3 \end{matrix}$$

$$\int \frac{1}{4+x^2} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int -\frac{1}{3} \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x)$$

$$= -\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{tg\,\theta}{2}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(tg\,\theta)$$

$$= -\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{tg\,\theta}{2}\right) + \frac{1}{3}\theta$$

$\boxed{B}$ $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \rightsquigarrow x^2 + 4y^2 \leq 4$

$\rightsquigarrow x^2 \leq 4 - 4y^2 = 4(1-y^2)$

$\rightsquigarrow |x| \leq 2\sqrt{1-y^2}$

$$\int_{y=-1}^{+1}\left(\int_{x=-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} 1\,dx\right)dy$$

$$= \int_{y=-1}^{1} 4\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$y = \operatorname{sen} t$ $\quad \sqrt{1-y^2} = \cos t$ $\quad y=-1 \rightsquigarrow t = -\frac{\pi}{2}$

$dy = \cos t\,dt$ $\quad y = +1 \to t = +\frac{\pi}{2}$

$$= \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos t \cdot \cos t \, dt$$

$$= 4 \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt$$

$$= 4 \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} t \cos t + \frac{1}{2} t \right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2}$$

$$= 4 \left[\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) - \left(0 - \frac{\pi}{4}\right) \right] = \pi + \pi = 2\pi$$

Questa è il doppio dell'area del disco di raggio 1.

$\boxed{C}$ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

$\rightsquigarrow r^2 + z^2 \leq 4 \Rightarrow z^2 \leq 4 - r^2$

$\rightsquigarrow |z| \leq \sqrt{4 - r^2}$

$x^2 + y^2 \leq 1 \rightarrow r^2 \leq 1 \rightarrow 0 \leq r \leq 1.$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{1} \left(\int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 1 \cdot r \, dz \right) dr \right) d\theta$$

p. 4/5

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{1} 2r\sqrt{4-r^2}\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left. -\frac{2}{3}(4-r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{1} d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} -\frac{2}{3}\left(3^{3/2} - 4^{3/2}\right)$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 8\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right)$$

$\boxed{D}$

A	B	C	D	=
1	3	6	10	4
3	6	10	15	1
6	10	15	21	0
10	15	21	28	1

p. 5/5

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & -3 & -8 & -15 & -11 \\ 0 & -8 & -21 & -39 & -24 \\ 0 & -15 & -39 & -72 & -39 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 8/3 & 5 & 11/3 \\ 0 & -8 & -21 & -39 & -24 \\ 0 & -15 & -39 & -72 & -39 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 8/3 & 5 & 11/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 & 16/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 8/3 & 5 & 11/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & = \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -39 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} A + D = 25 \\ B - 3D = -39 \\ C + 3D = 16 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D + 25 \\ 3D - 39 \\ -3D + 16 \\ D \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -39 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$