

DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 8 febbraio 2019

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici*. È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione martedì 12 febbraio, alle 12.30, al 1° piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad dx dy = r dr d\theta$$

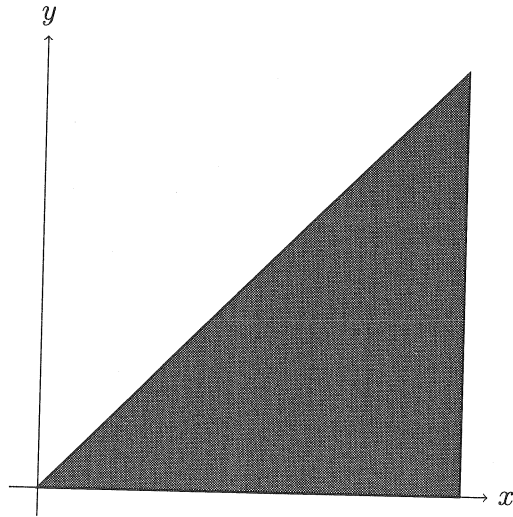
Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \\ dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

A. Siano A e B due parametri costanti. Calcolare

$$\int \frac{y^2}{(y-A)(y-B)} dy$$

B. Sia A un parametro positivo. Usare le coordinate *polari* e calcolare la media di $1/\sqrt{x^2 + y^2}$ sul triangolo con vertici $(0, 0)$, $(A, 0)$, e (A, A) .



C. Sia R un parametro positivo. Usare le coordinate *sferiche* e calcolare la media di $1/\sqrt{z}$ sulla semisfera data da

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \qquad z \geq 0$$

D. Usare il metodo di Gauss-Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{array}{rrcrcl} A & +B & +C & +D & = 1 \\ A & +2B & +3C & +4D & = 8 \\ A & +3B & +6C & +10D & = 27 \\ A & +4B & +10C & +20D & = 64 \end{array}$$

1/6

$$\boxed{A) \quad (y-A)(y-B) = y^2 - (A+B)y + AB}$$

$$\begin{array}{r|l} y^2 & y^2 - (A+B)y + AB \\ \hline & 1 \\ & y^2 - (A+B)y + AB \\ \hline & (A+B)y - AB \end{array}$$

$$\begin{aligned} y^2 &= 1(y^2 - (A+B)y + AB) + (A+B)y - AB \\ &= (y-A)(y-B) + (A+B)y - AB \end{aligned}$$

$$\frac{y^2}{(y-A)(y-B)} = 1 + \frac{(A+B)y - AB}{(y-A)(y-B)}$$

$$\frac{(A+B)y - AB}{(y-A)(y-B)} = \frac{C}{y-A} + \frac{D}{y-B}$$

$$(A+B)y - AB = C(y-B) + D(y-A)$$

$$y=B \leadsto (A+B)B - AB = D(B-A)$$

$$\leadsto D = B^2/(B-A)$$

2/6

$$y = A \rightarrow (A+B)A - AB = C(A-B)$$

$$\rightarrow C = A^2/(A-B)$$

$$\int \frac{y^2}{(y-A)(y-B)} dy = \int 1 + \frac{A^2}{A-B} \frac{1}{y-A} + \frac{B^2}{B-A} \frac{1}{y-B} dy$$

$$= \left(y + \frac{A^2}{A-B} \log(y-A) + \frac{B^2}{B-A} \log(y-B) \right)$$

[B]

$$y \geq 0 \rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$y \leq x \rightarrow r \sin \theta \leq r \cos \theta$$

$$\rightarrow \tan \theta \leq 1 \rightarrow \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$x \leq A \rightarrow r \cos \theta \leq A \rightarrow r \leq A/\cos \theta$$

$$\iint_{\mathcal{R}} 1 dA = \text{area} = A - A/2 = A^2/2$$

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dA = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \left(\int_{r=0}^{A/\cos \theta} \frac{1}{r} r dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/4} A/\cos \theta d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/4} A \sec \theta d\theta$$

3/6

$$= A \log(\tan \theta + \sec \theta) \Big|_{\theta=0}^{\pi/4}$$

$$= A (\log(1 + \sqrt{2}) - \log(0 + 1))$$

$$= A \log(1 + \sqrt{2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r} = \frac{A \log(1 + \sqrt{2})}{A^2/2}$$

$$= \left(\frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2} \right) \frac{1}{A}$$

[C] $z \geq 0 \rightarrow r \cos \theta \geq 0 \rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \rightarrow r \leq R$

$$\iiint_V 1 \, dV = \text{volume} = \frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{2\pi}{3} R^3$$

$$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{z}} \, dV = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^R \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r \cos \theta}} r^2 \sin \theta \, d\phi \right) dr \right) d\theta$$

4/6

$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} (\cos\theta)^{-1/2} \sin\theta \left(\int_{r=0}^R r^{3/2} dr \right) d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2}{5} R^{5/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (\cos\theta)^{-1/2} \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{4\pi}{5} R^{5/2} \left[-2(\cos\theta)^{1/2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}$$

$$= \frac{8\pi}{5} R^{5/2}$$

$$\frac{T}{\sqrt{2}} = \frac{8\pi/5 \cdot R^{5/2}}{2\pi/3 \cdot R^3} = \frac{12}{5} R^{-1/2}$$

[D]

A	B	C	D	=
①	1	1	1	1
1	2	3	4	8
1	3	6	10	27
1	4	10	20	64

5/6

$$E2 \leftarrow E2 - E1$$

$$E3 \leftarrow E3 - E1$$

$$E4 \leftarrow E4 - E1$$

①	1	1	1	1
0	①	2	3	7
0	2	5	9	26
0	3	9	19	63

$$E1 \leftarrow E1 - E2$$

$$E3 \leftarrow E3 - 2E2$$

$$E4 \leftarrow E4 - 3E2$$

①	0	-1	-2	-6
0	①	2	3	7
0	0	①	3	12
0	0	3	10	42

$$E1 \leftarrow E1 + E3$$

$$E2 \leftarrow E2 - 2E3$$

$$E4 \leftarrow E4 - 3E3$$

①	0	0	1	6
0	①	0	-3	-17
0	0	①	3	12
0	0	0	①	6

$$E1 \leftarrow E1 - E4$$

$$E2 \leftarrow E2 + 3E4$$

$$E3 \leftarrow E3 - 3E4$$

①	0	0	0	0
0	①	0	0	1
0	0	①	0	-6
0	0	0	①	6

6/6

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 1 \\ C &= -6 \\ d &= 6 \end{aligned}$$

Controlli:

$$0 + 1 - 6 + 6 = 1$$

$$0 + 2 - 1 - 3 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 8$$

$$0 + 3 - 1 - 6 \cdot 6 + 10 \cdot 6 = 27$$

$$0 + 4 - 1 - 10 \cdot 6 + 20 \cdot 6 = 64$$