

DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 13 luglio 2018

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici*. È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione mercoledì 18 luglio, alle 12.30, al 1° piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad dx dy = r dr d\theta$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \\ dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

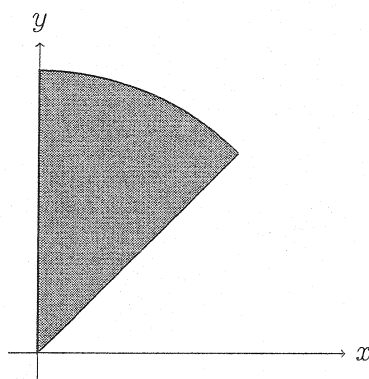
A. Calcolare

$$\int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} d\theta$$

tramite la sostituzione $x = \cos \theta$.

B. Sia $R > 0$ un parametro costante. Usare le coordinate polari e calcolare la media di x^2 sulla zona $\mathcal{Z}$ del piano definita da:

$$0 \leq x \leq y \qquad x^2 + y^2 \leq R^2$$



C. Sia $R > 0$ un parametro costante. Si consideri il volume $\mathcal{P}$ definito da:

$$0 \leq x \leq y \leq z \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

L'esercizio è di usare le coordinate sferiche e calcolare il volume di $\mathcal{P}$. Comunque, l'integrale $d\phi$ non è facile, e perciò, tutti i punti saranno dato sulla base di:

1. Un disegno di $\mathcal{P}$.
2. Il calcolo del volume di $\mathcal{P}$ *senza* l'uso del calcolo integrale.
3. Il calcolo dei limiti d'integrazione.
4. Il calcolo del primo integrale (dr) e del secondo integrale ($d\theta$).
5. Il calcolo del coseno di un arcotangente, che viene fuori da quel secondo integrale.

Se qualcuno/qualcuna riesce anche a calcolare correttamente il finale integrale ($d\phi$) avrà il 30 e lode.

D. Usare il metodo di Gauss-Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema:

$$\begin{array}{rrrrr} -p & -2q & +r & & = 3 \\ & -q & +2r & +s & = 6 \\ & p & & +3r & +3s & = 10 \\ 2p & +q & +4r & +6s & = 15 \end{array}$$

(Indicazione: il problema è truccato. Se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, non saranno necessari denominatori.)

p. 1/10

(A) $x = \cos \theta$

$$dx = -\sin \theta d\theta$$

$$\int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} d\theta = - \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} (-\sin \theta) d\theta$$

$$= - \int \frac{\cos^2 \theta}{(1 - \cos^2 \theta)^2} (-\sin \theta) d\theta = - \int \frac{x^2}{(1-x^2)^2} dx$$

$$(1-x^2)^2 = (1-x)^2(1+x)^2$$

$$\frac{-x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1+x} + \frac{D}{(1+x)^2}$$

$$\begin{aligned} -x^2 &= A(1-x)(1+x)^2 + B(1+x)^2 \\ &\quad + C(1-x)^2(1+x) + D(1-x)^2 \end{aligned}$$

Mettiamo $x=+1$

$$-1^2 = 0 + B(1+1)^2 + 0 + 0 \rightarrow -1 = 4B$$

$$\rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

p. 2/10

Mettiamo $x = -1$:

$$-(-1)^2 = 0 + 0 + 0 + D(1 - (-1))^2$$

$$\leadsto -1 = 4D \leadsto D = -\frac{1}{4}$$

$$-x^2 = A(1-x)(1+x)^2 + B(1+x)^2$$

$$+ C(1-x)^2(1+x) + D(1-x)^2$$

$$= A(1-x^2)(1+x) + B(1+2x+x^2)$$

$$+ C(1-x^2)(1-x) + D(1-x)^2$$

$$= (A+B+C+D)$$

$$+ (A+2B-C-2D)x$$

$$+ (-A+B-C+D)x^2$$

$$+ (-A+C)x^3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B+C+D=0 \\ A+2B-C-2D=0 \\ -A+B-C+D=-1 \\ -A+C=0 \end{array} \right\} \leadsto \left\{ \begin{array}{l} A+C=-B-D=\frac{1}{2} \\ A-C=-2B+2D=0 \\ -A-C=-1-B-D=-\frac{1}{2} \\ -A+C=0 \end{array} \right\}$$

$$\leadsto \left\{ \begin{array}{l} A+C=\frac{1}{2} \\ A-C=0 \end{array} \right\}$$

p. 3/10

$$A \quad C = \cos \theta.$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \\ 1 & -1 & 0 & \end{array} \xrightarrow{E2 \leftarrow E2 - E1} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \\ 0 & -2 & -\frac{1}{2} & \end{array}$$

$$\xrightarrow{E2 \leftarrow -\frac{1}{2}E2} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \end{array} \xrightarrow{E1 \leftarrow E1 - E2} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \end{array}$$

$$A = \frac{1}{4}$$

$$C = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{-x^2}{(1-x^2)^2} dx = \int \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{4} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x} - \frac{1}{4} \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\log(1-x) + \frac{1}{1-x} + \log(1+x) + \frac{1}{1+x} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\log(1-\cos \theta) - \frac{1}{1-\cos \theta} + \log(1+\cos \theta) + \frac{1}{1+\cos \theta} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\log \left(\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta} \right) + \frac{-2\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right)$$

p. 4/10

(B)

$$x^2 + y^2 \leq R^2 \leadsto r \leq R$$

$$0 \leq x, y \rightarrow 0 \leq \cos \theta, \sin \theta \rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x \leq y \rightarrow \cos \theta \leq \sin \theta \leadsto 1 \leq \tan \theta$$

$$\leadsto \theta \geq \arctan 1 = \pi/4$$

$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dA = \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^R 1 \cdot r \, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \frac{R^2}{2} d\theta = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi R^2}{8}$$

$$\iint_{\mathcal{D}} x^2 \, dA = \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^R (r \cos \theta)^2 r \, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \frac{R^4}{4} \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{R^4}{4} \left(\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \theta \right) \Big|_{\theta=\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{R^4}{4} \left(\left(0 + \frac{\pi}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right)$$

p. 5/10

$$= \frac{R^4}{4} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{R^4}{32} (\pi - 2)$$

$$\overline{X^2} = \frac{\frac{R^4}{32} (\pi - 2)}{\frac{\pi R^2}{8}}$$

$$= \frac{(\pi - 2) R^2}{4\pi}$$

(C) $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \leadsto r \leq R$

(3)

$$x, y \geq 0 \leadsto r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi \geq 0$$

$$\leadsto \cos \varphi, \sin \varphi \geq 0 \rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$z \geq 0 \leadsto r \cos \theta \geq 0 \leadsto \cos \theta \geq 0 \leadsto 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x \leq y \leadsto r \cos \theta \cos \varphi \leq r \cos \theta \sin \varphi$$

$$\leadsto \cos \varphi \leq \sin \varphi \leadsto 1 \leq \tan \varphi$$

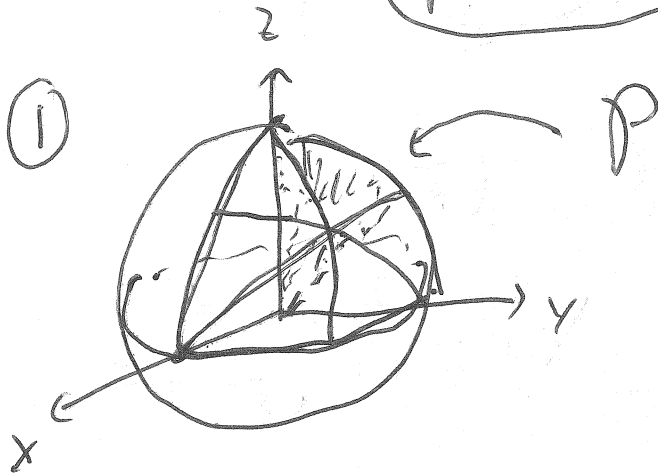
$$\leadsto \varphi \geq \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$y \leq z \leadsto r \cos \theta \sin \varphi \leq r \cos \theta$$

$$\leadsto \tan \theta \leq 1 / \sin \varphi$$

$$\leadsto \theta \leq \arctan(1 / \sin \varphi)$$

p. 6/10



② P è $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}$ della sfera. Perciò
il suo volume è $\frac{1}{48} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi R^3}{36}$

④ $\iiint_P 1 \, dV$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_{\theta=0}^{\arctan(1/\tan\varphi)} \left(\int_{r=0}^R 1 \cdot r^2 \sin\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_{\theta=0}^{\arctan(1/\tan\varphi)} \frac{R^3}{3} \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi$$

$$= \frac{R^3}{3} \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \left[-\cos\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\arctan(1/\tan\varphi)} d\varphi$$

p. 7/10

$$\textcircled{5} \quad \theta_0 = \arctan(1/\tan \varphi) \leadsto \tan \theta_0 = \frac{1}{\tan \varphi}$$

$$\leadsto \sec^2 \theta_0 = 1 + \tan^2 \theta_0 \leadsto 1 + \frac{1}{\tan^2 \varphi} = \frac{1 + \tan^2 \varphi}{\tan^2 \varphi}$$

$$\leadsto \sec \theta_0 = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} / \tan \varphi \leadsto \cos \theta_0 = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

$$= \frac{R^3}{3} \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} 1 - \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} d\varphi$$

$$\downarrow \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} d\varphi = \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan \varphi}{\sqrt{2 - \cos^2 \varphi}} d\varphi$$

$$\begin{aligned} u &= \cos \varphi \\ du &= -\sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$= - \int_{u=\sqrt{2}/2}^{u=0} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} du$$

$$u = \sqrt{2} \sin v$$

$$du = \sqrt{2} \cos v dv$$

$$0 = u = \sqrt{2} \sin v \leadsto v = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = u = \sqrt{2} \sin v$$

$$\leadsto \frac{1}{2} = \sin v \leadsto v = \frac{\pi}{6}$$

p. 8/10

$$= - \int_{v=\pi/6}^0 \frac{1}{\sqrt{2-2\cos^2 v}} \sqrt{2} \cos v \, dv$$

$$= - \int_{v=\pi/6}^0 \frac{1}{\sqrt{2} \cos v} \cdot \sqrt{2} \cos v \, dv = - \int_{v=\pi/6}^0 1 \, dv$$

$$= - \left(0 - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{6}$$

□

$$\iiint_P 1 \, dV = \frac{R^3}{3} \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} 1 - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1+\cos^2 \varphi}} \, d\varphi$$

$$= \frac{R^3}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{R^3}{3} \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi R^3}{36}$$

① p q m s = cost.

-1	-2	1	0	3
0	-1	2	1	6
1	0	3	3	10
2	1	4	6	15

$\xrightarrow{E1 \leftrightarrow E2}$

①	2	-1	0	-3
	0	-1	2	6
	1	0	3	10
	2	1	4	15

P. 9/10

$$\begin{aligned} E3 &\leftarrow E3 - E1 \\ E4 &\leftarrow E4 - 2E1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 13 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & 21 \end{array}$$

$$E2 \leftarrow -E2$$

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 13 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & 21 \end{array}$$

$$\begin{aligned} E1 &\leftarrow E1 - 2E2 \\ E3 &\leftarrow E3 + 2E2 \\ E4 &\leftarrow E4 + 3E2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 0 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} E1 &\leftarrow E1 - 2E3 \\ E2 &\leftarrow E2 + E3 \\ E4 &\leftarrow E4 - 3E3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{p} & + 3n = 7 \\ \textcircled{q} & - 2n = -5 \\ \textcircled{s} & = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= -3n + 7 \\ q &= 2n - 5 \\ n &= n \\ s &= 1 \end{aligned}$$

p. 10/10

Controllo:

$$-(-3n+7) - 2(2n-5) + n = 3$$

$$-(2n-5) + 2n + 1 = 6$$

$$(-3n+7) + 3n + 3 = 10$$

$$2(-3n+7) + (2n-5) + 4n + 6 = 15$$

✓