

DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 26 giugno 2018

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici*. È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione venerdì 29 giugno, alle 12.30, al 1° piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \\ dx \, dy \, dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

A. Calcolare

$$\int \frac{p^3}{(p^2 + 5p + 6)^2} dp$$

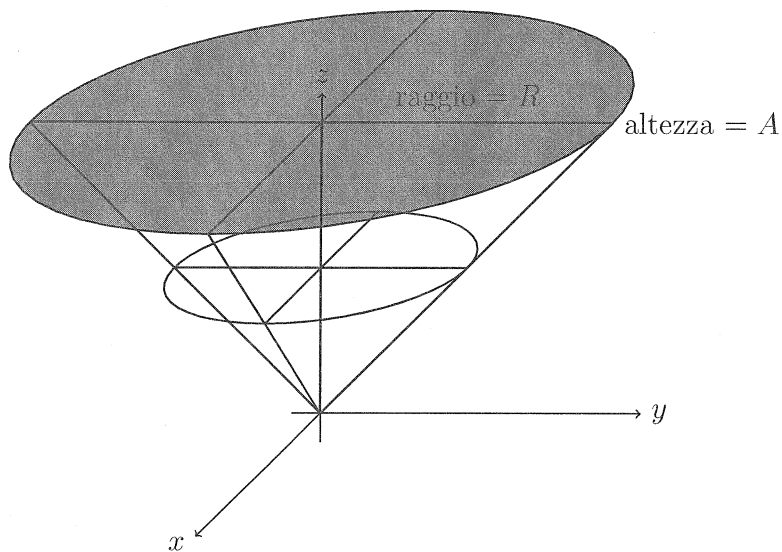
B. Usare le coordinate sferiche e calcolare il volume del tetraedro definito da

$$0 \leq z \leq y \leq x \leq 1$$

C. Siano A e R due costanti positivi. Sia $\mathcal{C}$ il cono definito da

$$0 \leq z \leq A \qquad x^2 + y^2 \leq \frac{R^2 z^2}{A^2}$$

Usare le coordinate cilindriche e calcolare la media di $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ su $\mathcal{C}$.



D. Usare il metodo di Gauss-Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema:

$$\begin{array}{rrcrrcl} A & +2B & + & D & = & 3 \\ 2A & +3B & +C & +3D & = & 6 \\ 3A & +4B & +3C & +6D & = & 10 \\ 4A & +5B & +6C & +10D & = & 15 \end{array}$$

(Indicazione: il problema è truccato. Se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, non saranno necessari denominatori.)

p. 1/8

$$(A) \quad p^2 + 5p + 6 = (p+2)(p+3)$$

$$(p^2 + 5p + 6)^2 = (p+2)^2(p+3)^2$$

$$\frac{p^3}{(p+2)^2(p+3)^2} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{(p+2)^2} + \frac{C}{p+3} + \frac{D}{(p+3)^2}$$

$$p^3 = A(p+2)(p+3)^2 + B(p+3)^2 + C(p+2)^2(p+3) + D(p+2)^2$$

$$\underline{p = -2} \rightsquigarrow -8 = 0 + B(-2+3)^2 + 0 + 0$$

$$\rightsquigarrow -8 = B \cdot 1^2 \rightarrow \boxed{B = -8}$$

$$\underline{p = -3} \rightsquigarrow -27 = 0 + 0 + 0 + D(-3+2)^2$$

$$\rightsquigarrow -27 = D(-1)^2 \rightarrow \boxed{D = -27}$$

q. 2/9

$$p^3 = A(p+2)(p^2+6p+9) + B(p^2+6p+9) \\ + C(p^2+4p+4)(p+3) + D(p^2+4p+4)$$

$$= p^3(A + C) \\ + p^2(8A + B + 7C + D) \\ + p(21A + 6B + 16C + 4D) \\ + (18A + 9B + 12C + 4D)$$

↪

$$A + C = 1$$

$$8A + B + 7C + D = 0$$

$$21A + 6B + 16C + 4D = 0$$

$$18A + 9B + 12C + 4D = 0$$

↪

$$A + C = 1$$

$$8A + 7C = -B - D = 8 + 27 = 35$$

$$21A + 16C = -6B - 4D = 48 + 108 = 156$$

$$18A + 12C = -9B - 4D = 72 + 108 = 180$$

$p, 3/8$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 35 & \sim & 0 & -1 & 27 \\ 21 & 16 & 156 & & 0 & -5 & 135 \\ 18 & 12 & 180 & & 0 & -6 & 162 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} \rightarrow & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 28 \\ & 0 & 1 & -27 & \rightarrow & 0 & 1 & -27 \\ & 0 & -5 & 135 & & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -6 & 162 & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\rightarrow$ $\begin{array}{l} A=28 \\ C=-27 \end{array}$

$$\int \frac{p^3}{(p^2+5p+6)^2} dp = \int \frac{28}{p+2} - \frac{8}{(p+2)^2}$$

$$- \frac{27}{p+3} + \frac{27}{(p+3)^2} dp$$

$$= 28 \log(p+2) + 8/(p+2) - 27 \log(p+3) + 27/(p+3)$$

p. 4 / 8

$$\textcircled{B} \quad z \geq 0 \rightarrow r \cos \theta \geq 0 \rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x, y \geq 0 \rightarrow r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta \geq 0$$

$$\rightarrow \cos \varphi, \sin \varphi \geq 0 \rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y \leq x \rightarrow r \sin \varphi \sin \theta \leq r \cos \varphi \sin \theta$$

$$\rightarrow \sin \varphi \leq \cos \varphi \rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$z \leq y \rightarrow r \cos \theta \leq r \sin \theta \sin \varphi$$

$$\rightarrow \cos \theta \leq \sin \theta \sin \varphi$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sin \varphi} \leq \tan \theta \rightarrow \theta \geq \arctan\left(\frac{1}{\sin \varphi}\right)$$

$$x \leq 1 \rightarrow r \cos \varphi \sin \theta \leq 1$$

$$\rightarrow r \leq \frac{1}{\cos \varphi \sin \theta}$$

$$\int_{0 \leq z \leq y \leq x \leq 1} 1 \, dV = \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \left(\int_{\theta=\arctan(1/\sin \varphi)}^{\pi/2} \right) \left(\int_{r=0}^{\frac{1}{\cos \varphi \sin \theta}} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

p. 5/9

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \left(\int_{\theta=\arctan(\frac{1}{\tan \varphi})}^{\pi/2} \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^3 \varphi} \frac{1}{\tan^3 \theta} \tan \theta d\theta \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^3 \varphi} \int_{\theta=\arctan(\frac{1}{\tan \varphi})}^{\pi/2} \csc^2 \theta d\theta \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^3 \varphi} \left[-\cot \theta \right]_{\theta=\arctan(\frac{1}{\tan \varphi})}^{\pi/2} d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^3 \varphi} [-0 - (-\tan \varphi)] d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \frac{\tan \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos^{-2} \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} = \cancel{\frac{1}{6} [2 - 1]}$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{(\sqrt{2}/2)^2} - \frac{1}{1^2} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{1/2} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{6} [2 - 1] = \left(\frac{1}{6} \right)$$

p. 6/9

$$\textcircled{c} \iiint_E I dV = \frac{1}{3} \pi R^2 A \quad (\text{formula nota})$$

$$x^2 + y^2 \leq \frac{R^2 z^2}{A^2} \rightarrow r^2 \leq \frac{R^2 z^2}{A^2}$$

$$\rightarrow r \leq R z / A$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^A \left(\int_{r=0}^{Rz/A} \sqrt{r^2 + z^2} \cdot r dr \right) dz \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_{z=0}^A \left(\int_{r=0}^{Rz/A} r (r^2 + z^2)^{1/2} dr \right) dz$$

$$= 2\pi \int_{z=0}^A \left[\frac{1}{3} (r^2 + z^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{r=Rz/A} dz$$

p. 7/9

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{3} \int_{z=0}^A \left(\frac{R^2 z^2}{A^2} + z^2 \right)^{3/2} (z^2)^{3/2} dz \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_{z=0}^A \left(\left(\frac{R^2}{A^2} + 1 \right) z^2 \right)^{3/2} - z^3 dz \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_{z=0}^A \left(\frac{R^2 + A^2}{A^2} \right)^{3/2} (z^2)^{3/2} - z^3 dz \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_{z=0}^A \frac{(R^2 + A^2)^{3/2}}{A^3} z^3 - z^3 dz \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{(R^2 + A^2)^{3/2}}{A^3} - 1 \right) \int_{z=0}^A z^3 dz \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{(R^2 + A^2)^{3/2} - A^3}{A^3} \right) \frac{A^4}{4} \\ &= \frac{\pi}{6} ((R^2 + A^2)^{3/2} - A^3) A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \frac{\frac{\pi}{6} ((R^2 + A^2)^{3/2} - A^3) A}{\frac{1}{3} \pi R^2 A} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} ((R^2 + A^2)^{3/2} - A^3) \end{aligned}$$

p. 8/9

A	B	C	D	=
1	2	0	1	3
2	3	1	3	6
3	4	3	6	10
4	5	6	10	19

$$\begin{array}{l}
 \hookrightarrow \textcircled{1} \quad 2 \ 0 \ 1 \ 3 \\
 E2 \leftarrow E2 - 2E1 \quad 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0 \\
 E3 \leftarrow E3 - 3E1 \quad 0 \ -2 \ 3 \ 3 \ 1 \\
 E4 \leftarrow E4 - 4E1 \quad 0 \ -3 \ 6 \ 6 \ 3
 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l}
 \textcircled{1} \quad 2 \ 0 \ 1 \ 3 \\
 0 \ \textcircled{1} \ -1 \ -1 \ 0 \\
 0 \ -2 \ 3 \ 3 \ 1 \\
 0 \ -3 \ 6 \ 6 \ 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \hookrightarrow \textcircled{1} \quad 0 \ 2 \ 3 \ 3 \\
 E1 \leftarrow E1 - 2E2 \quad 0 \ \textcircled{1} \ -1 \ -1 \ 0 \\
 E3 \leftarrow E3 + 2E2 \quad 0 \ 0 \ \textcircled{1} \ 1 \ 1 \\
 E4 \leftarrow E4 + 3E2 \quad 0 \ 0 \ 3 \ 3 \ 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \hookrightarrow \textcircled{1} \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\
 E1 \leftarrow E1 - 2E3 \quad 0 \ \textcircled{1} \ 0 \ 0 \ 1 \\
 E2 \leftarrow E2 + E3 \quad 0 \ 0 \ \textcircled{1} \ 1 \ 1 \\
 E4 \leftarrow E4 - 3E3 \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0
 \end{array}$$

p. 9/9

(A)

$$+ D = 1$$

(B)

$$= 1$$

(C)

$$+ D = 1$$

$$0 = 0$$

~

$$A = -D + 1$$

$$B = 1$$

$$C = -D + 1$$

$$D = D$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$