DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 8 febbraio 2018

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione lunedì 11 febbraio, alle 11.00, al 1° piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

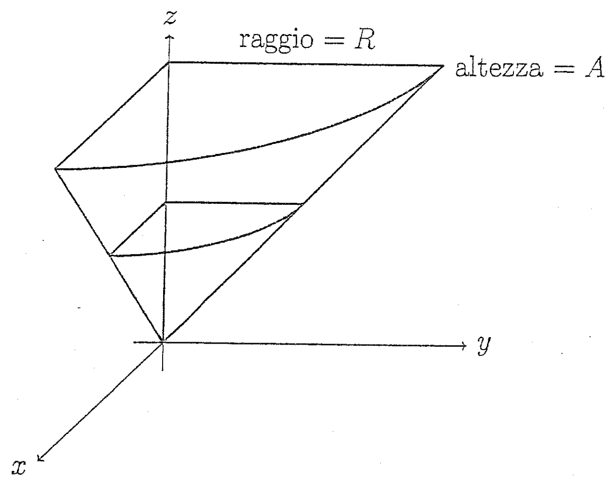
A. Usare la sostituzione $y = e^t$ e calcolare

$$\int \frac{1}{(e^t-1)(e^t-2)}\,dt$$

B. Siano A e R due costanti positivi. Sia Q il quarto di un cono definito da

$$0 \leq z \leq A \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad x^2 + y^2 \leq \frac{R^2 z^2}{A^2}$$

Usare le coordinate cilindriche e calcolare la media di xyz su Q.



C. Usare le coordinate *sferiche* e (ri)calcolare il volume di Q, come di sopra.

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{array}{lllll} a & +b & +c & +d & = 0 \\ a & +2b & +3c & +4d & = 1 \\ a & +3b & +6c & +10d & = 2 \\ a & +4b & +10c & +20d & = 1 \end{array}$$

(Indicazione: se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, non saranno necessari denominatori.)

A

$y = e^t$

$dy = e^t\,dt \rightarrow dt = \frac{dy}{e^t} = \frac{dy}{y}$

$$\int \frac{1}{(e^t-1)(e^t-2)}\,dt = \int \frac{1}{(y-1)(y-2)y}\,dy$$

$$= \int \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2} + \frac{C}{y}\,dy$$

$$\frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2} + \frac{C}{y} = \frac{1}{(y-1)(y-2)y}$$

$\hookrightarrow A(y-2)y + B(y-1)y + C(y-1)(y-2) = 1$

$y=2 \rightarrow 0 + B\cdot 1\cdot 2 + 0 = 1 \rightarrow B = \frac{1}{2}$

$y=0 \rightarrow 0 + 0 + C(-1)(-2) = 1$
$\rightarrow C = \frac{1}{2}$

$y=1 \rightarrow A(-1)(1) + 0 + 0 = 1 \rightarrow A = -1$

2/7

$$\int \frac{-1}{y-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{y}\, dy$$

$$= -\log(y-1) + \frac{1}{2}\log(y-2) + \frac{1}{2}\log y$$

$$= -\log(e^t-1) + \frac{1}{2}\log(e^t-2) + \frac{1}{2}\log(e^t)$$

$$= -\log(e^t-1) + \frac{1}{2}\log(e^t-2) + \frac{1}{2}t$$

B $\quad 0 \leq z \leq A$

$x \geq 0 \rightsquigarrow r\cos\theta \geq 0 \rightsquigarrow \cos\theta \geq 0$

$y \geq 0 \rightsquigarrow r\,\mathrm{sen}\,\theta \geq 0 \rightsquigarrow \mathrm{sen}\,\theta \geq 0$

$\hookrightarrow \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$x^2+y^2 \leq \frac{R^2z^2}{A^2} \rightsquigarrow r^2 \leq \frac{R^2z^2}{A^2}$$

$$\rightsquigarrow r \leq Rz/A$$

$$\iiint_\Omega 1\, dV = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\pi R^2 A = \pi R^2 A/12$$

3/7

$$\iiint_{\Omega} xyz \, dV$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left(\int_{z=0}^{z=A} \left(\int_{r=0}^{r=Rz/A} (r\cos\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta) z \cdot r \, dr \right) dz \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left(\int_{z=0}^{z=A} \frac{1}{4} \left(\frac{Rz}{A}\right)^4 z \,\mathrm{sen}\,\theta \cos\theta \, dz \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{1}{4} \frac{R^4}{A^4} \frac{1}{6} A^6 \,\mathrm{sen}\,\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{24} R^4 A^2 \left. \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{1}{48} R^4 A^2$$

$$\overline{xyz} = \frac{R^4 A^2/48}{\pi R^2 A/12} = \frac{R^2 A}{4\pi}$$

c) $0 \le z \to 0 \le r\cos\theta \to \cos\theta \ge 0$

$\to 0 \le \theta \le \pi/2$

$z \le A \to r\cos\theta \le A \to r \le A/\cos\theta$

$x \ge 0 \to 0 \le r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \to 0 \le \cos\varphi$

$y \ge 0 \to 0 \le r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \to 0 \le \mathrm{sen}\,\varphi$

$\to 0 \le \varphi \le \pi/2$

$x^2+y^2 \le \dfrac{R^2 z^2}{A^2} \to (r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2$

$\le \dfrac{R^2}{A^2}(r\cos\theta)^2$

$\to r^2\,\mathrm{sen}^2\theta \le \dfrac{R^2}{A^2} r^2\cos^2\theta$

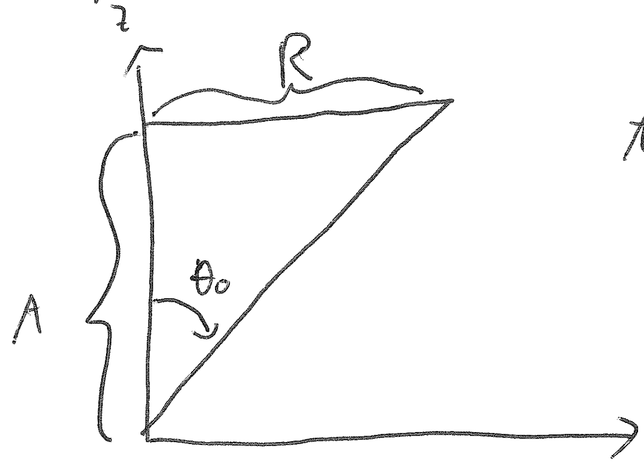
$\to r\,\mathrm{sen}\,\theta \le \dfrac{R}{A} r\cos\theta$

$\to \mathrm{sen}\,\theta \le \dfrac{R}{A}\cos\theta$

$\to \mathrm{tg}\,\theta \le \dfrac{R}{A}$

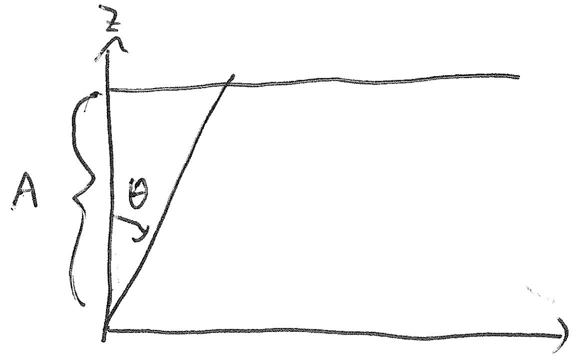
$\to \theta \le \theta_0 = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{R}{A}\right)$

oppure



$$tg\,\theta_0 = \frac{OPP}{AD} = \frac{R}{A}$$

distanza dall'asse z
$$\| \quad \sqrt{x^2+y^2}$$



$\sqrt{x^2+y^2}$

$$\cos\theta = \frac{AD}{IP} = \frac{A}{IP} \;\rightarrow\; IP = A/\cos\theta$$

$$\rho \le IP = A/\cos\theta$$

$$\iiint_\Omega 1 \, dV$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\theta_0} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=A/\cos\theta} 1 \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\theta \, d\rho \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\theta_0} \frac{1}{3} \left(\frac{A}{\cos\theta} \right)^3 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \right) d\varphi$$

6/7

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\theta_0} \frac{1}{3} A^3 \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta} \, d\theta \right) d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} A^3 \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\theta_0} \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2\theta} \, d\theta \right.$$

$$= \frac{\pi A^3}{12} \left(\frac{1}{\cos^2\theta_0} - 1 \right) = \frac{\pi A^3}{12} (\sec^2\theta_0 - 1)$$

$$= \frac{\pi A^3}{12} \operatorname{tg}^2\theta_0 = \frac{\pi A^3}{12} \left(\frac{R}{A}\right)^2 = \frac{\pi A R^2}{12}$$

(D)

a	b	c	d	=
1	1	1	1	0
1	2	3	4	1
1	3	6	10	2
1	4	10	20	1

$E2 \leftarrow E2 - E1$
$E3 \leftarrow E3 - E1$
$E4 \leftarrow E4 - E1$

1	1	1	1	0
0	1	2	3	1
0	2	5	9	2
0	3	9	19	1

$E1 \leftarrow E1 - E2$
$E3 \leftarrow E3 - 2E2$
$E4 \leftarrow E4 - 3E4$

7/7

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & -2 \end{matrix} \quad \xrightarrow[E4 \leftarrow E4 - 3E3]{E1 \leftarrow E1 + E3 \quad E2 \leftarrow E2 - 2E3}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{matrix} \quad \xrightarrow[E3 \leftarrow E3 - 3E4]{E1 \leftarrow E1 - E4 \quad E2 \leftarrow E2 + 3E4}$$

$$\begin{matrix} a & b & c & d & = \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \\ d = -2 \end{matrix}}$$