DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di ~~28~~ 9 settembre 2017

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

$\boxed{11}$

A. Usare la sostituzione $y = \mathrm{sen}\,t$ e calcolare

$$\int \frac{1}{\cos^3 t}\,dt$$

NOTA BENE: l'esito si trova senza difficolta attraverso la formula per la primitiva di $\sec^n t$; ma l'esercizio è altro — di ottenere l'esito attraverso la sostituzione indicata.

10

B. Sia $\mathcal{A}$ la zona nel piano determinata da:

$$x^2 \leq y \leq x$$

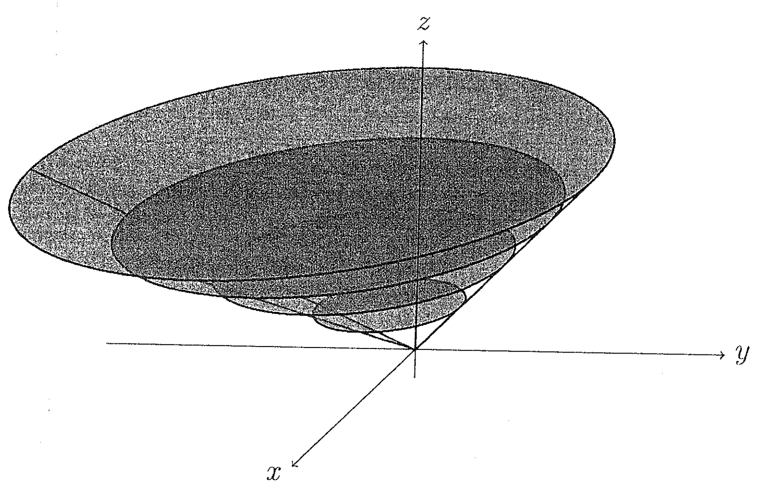
Fare un disegno e usare le coordinate polari per calcolare l'area di $\mathcal{A}$. (Indicazioni: sarà pressapoco impossibile calcolare i limiti d'integrazione per θ se non si fa bene il disegno. La stessa area è abbastanza facile da calcolare con le coordinate rettangolari, e questo mette a disposizione un modo per controllare l'esito.)

10

C. Per un fissato valore positivo $A > 0$, sia C il cono determinato da

$$0 \leq z \leq A \qquad\qquad x^2 + y^2 \leq 2xz$$

Sul cono $\mathcal{C}$, calcolare $\bar{x}$, la media della coordinata x, attraverso l'uso delle coordinate cilindriche.



9

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{array}{ccccc} a & +b & +c & +d & =1 \\ a & +2b & +3c & +4d & =2 \\ a & +3b & +6c & +10d & =1 \\ a & +4b & +10c & +20d & =0 \end{array}$$

(Indicazione: se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, non saranno necessari denominatori.)

40

$\boxed{A}$ $y = \operatorname{sen} t \qquad dy = \cos t \, dt$

$$\int \frac{1}{\cos^3 t} dt = \int \frac{1}{\cos^4 t} \cos t \, dt$$

$$= \int \frac{1}{(\cos^2 t)^2} \cos t \, dt = \int \frac{1}{(1-\operatorname{sen}^2 t)^2} \cos t \, dt$$

$$= \int \frac{1}{(1-y^2)^2} dy$$

$$\frac{1}{(1-y^2)^2} = \frac{1}{((1-y)(1+y))^2} = \frac{1}{(1-y)^2(1+y)^2}$$

$$= \frac{A}{1-y} + \frac{B}{(1-y)^2} + \frac{C}{(1+y)} + \frac{D}{(1+y)^2}$$

$$\rightsquigarrow 1 = A(1-y)(1+y)^2 + B(1+y)^2 + C(1-y)^2(1+y) + D(1-y)^2$$

Mettiamo $y = 1$

$$1 = 0 + 4B + 0 + 0 \rightsquigarrow B = 1/4$$

Mettiamo $y=-1$

$$1 = 0+0+4C+0 \rightsquigarrow C = 1/4$$

$$1 = A(1-y)(1+y)^2 + \tfrac{1}{4}(1+y)^2 + C(1-y)^2(1+y) + \tfrac{1}{4}(1-y)^2$$

$$= A(1-y^2)(1+y) + \tfrac{1}{4}(1+2y+y^2) + C(1-y^2)(1-y) + \tfrac{1}{4}(1-2y+y^2)$$

$$\begin{aligned} = {} & A && + \tfrac{1}{4} && + C && + \tfrac{1}{4} \\ & + Ay && + \tfrac{1}{2}y && - Cy && - \tfrac{1}{2}y \\ & - Ay^2 && + \tfrac{1}{4}y^2 && - Cy^2 && + \tfrac{1}{4}y^2 \\ & - Ay^3 && && + Cy^3 && \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} A + C + \tfrac{1}{2} = 1 \\ A - C = 0 \\ -A - C + \tfrac{1}{2} = 0 \\ -A + C = 0 \end{cases} \rightsquigarrow A = C$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 2A + \tfrac{1}{2} = 1 \\ -2A + \tfrac{1}{2} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow 2A = \tfrac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow A = C = \tfrac{1}{4}$$

$$\frac{1}{(1-y^2)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2}\right)$$

$$\int \frac{1}{(1-y^2)^2}\,dy = \frac{1}{4}\Big(-\log(1-y) + \frac{1}{1-y}$$
$$+ \log(1+y) - \frac{1}{1+y}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(-\log(1-\operatorname{sen} t) + \frac{1}{1-\operatorname{sen} t}$$
$$+ \log(1+\operatorname{sen} t) - \frac{1}{1+\operatorname{sen} t}\Big)$$

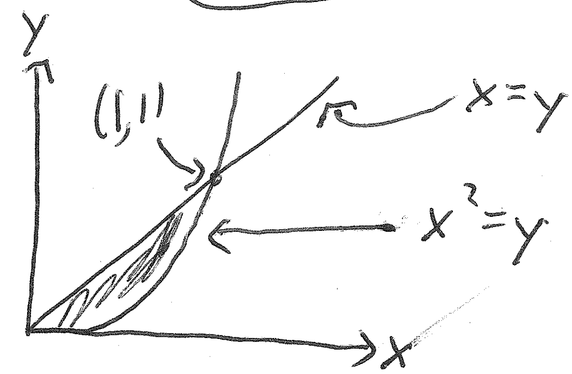
$$= \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}\right) + \frac{2\operatorname{sen} t}{(1-\operatorname{sen} t)(1+\operatorname{sen} t)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{(1+\operatorname{sen} t)^2}{\cos^2 t}\right) + \frac{2\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1+\operatorname{sen} t}{\cos t}\right) + \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log(\sec t + \operatorname{tg} t) + \sec t \cdot \operatorname{tg} t\right)$$

B



$$0 \leq \theta \leq \pi/4$$

$$(r\cos\theta)^2 \leq r\,\text{sen}\,\theta \leq r\cos\theta$$

$$\hookrightarrow r\cos^2\theta \leq \text{sen}\,\theta \leq \cos\theta$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} r \leq \text{sen}\,\theta/\cos^2\theta \\ \text{sen}\,\theta \leq \cos\theta \longleftrightarrow \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \left(\int_{r=0}^{r=\text{sen}\,\theta/\cos^2\theta} 1 \cdot r \, dr \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^4\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^4\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi/4} \sec^4\theta - \sec^2\theta \, d\theta$$

$$\int \sec^2\theta \, d\theta = \frac{1}{1} \operatorname{tg}\theta \sec^0\theta + \frac{0}{1}\int 1 \, d\theta$$

$$= \operatorname{tg}\theta$$

$$\int \sec^4\theta \, d\theta = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\theta \sec^2\theta + \frac{2}{3}\int \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{tg}\theta \sec^2\theta + \frac{2}{3} \operatorname{tg}\theta$$

$$\int \sec^4\theta - \sec^2\theta \, d\theta = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\theta \sec^2\theta + \frac{2}{3}\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\theta \sec^2\theta - \operatorname{tg}\theta\right)$$

$$\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi/4} \sec^4\theta - \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\theta \sec^2\theta - \operatorname{tg}\theta\right)_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(1\cdot(1^2+1) - 1 - 0 + 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(2-1) = \frac{1}{6}$$

$\boxed{C}$ $0 \le z \le A$ $\quad 0 \le r$

$-\pi \le \theta \le \pi$

$x^2+y^2 \le 2xz \rightsquigarrow r^2 \le 2r\cos\theta \cdot z$

$\rightsquigarrow r \le 2z\cos\theta$

$0 \le r \le 2z\cos\theta$ è possibile solo se $\cos\theta \ge 0$, quindi $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\int_{z=0}^{z=A}\left(\int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}\left(\int_{r=0}^{r=2z\cos\theta} 1\cdot r\,dr\right)d\theta\right)dz$$

$$= 2\int_{z=0}^{A}\left(\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi/2} z^2\cos^2\theta\,d\theta\right)dz$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{2}\int_{z=0}^{A} z^2\,dz = \frac{\pi A^3}{3}$$

$$\iiint_C x\,dV = \iiint_C r\cos\theta\,dV$$

$$= \int_{z=0}^{z=A} \left(\int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} \left(\int_{r=0}^{r=2z\cos\theta} r\cos\theta \cdot r \, dr \right) d\theta \right) dz$$

$$= \frac{8}{3} \int_{z=0}^{z=A} \left(\int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} z^3 \cos^3\theta \cdot \cos\theta \, d\theta \right) dz$$

$$\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta = \frac{1}{4} \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta \Big]_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta \right.$$

$$= 0 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta \cos^1\theta \Big]_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, d\theta \right)$$

$$\left. = \frac{3}{4} \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{8} \right]$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} \int_{z=0}^{z=A} z^3 \, dz$$

$$= \frac{\pi}{4} A^4$$

$$\bar{x} = \iiint_E x \, dV \Big/ \iiint_E 1 \, dV = \frac{\frac{\pi}{4} A^4}{\frac{\pi}{3} A^3} = \frac{3}{4} A$$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & = \text{cost.} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 \end{array} \xrightarrow[E4 \leftarrow E4 - E1]{E2 \leftarrow E2 - E1,\ E3 \leftarrow E3 - E1} \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & -1 \end{array}$$

$$\xrightarrow[E3 \leftarrow E3 - 2E2,\ E4 \leftarrow E4 - 3E2]{E1 \leftarrow E1 - E2} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & -4 \end{array}$$

$$\xrightarrow[E4 \leftarrow E4 - 3E3]{E1 \leftarrow E1 + E3,\ E2 \leftarrow E2 - 2E3} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\xrightarrow[E3 \leftarrow E3 - 3E4]{E1 \leftarrow E1 - E4,\ E2 \leftarrow E2 + 3E4} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = -4 \\ b = 11 \\ c = -8 \\ d = 2 \end{array}}$$