DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 14 settembre 2017

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r\operatorname{sen}\theta\cos\phi \qquad y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

A. Usare la sostituzione $x = e^t$ e calcolare

$$\int \frac{1}{e^{2t} + 3e^t + 2}\,dt$$

B. Siano $R > A > B > 0$ costanti, e sia $\mathcal{V}$ la forma solida data da

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \qquad\qquad B \leq z \leq A$$

Fare un disegno e usare le coordinate cilindriche per calcolare la media di z su $\mathcal{V}$.

C. Siano $R > A > B > 0$ costanti. Usare le coordinate sferiche e calcolare

1. il volume della calotta data da $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ e $A \leq z$.
2. per *analogia*, il volume della calotta data da $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ e $B \leq z$,
3. per *sottrazione*, il volume della forma $\mathcal{V}$ data da $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ e $B \leq z \leq A$.

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema:

$$\begin{array}{rrrrl} a & +2b & +3c & +5d & = 6 \\ 2a & +3b & +4c & +6d & = 7 \\ 3a & +4b & +5c & +8d & = 9 \\ 4a & +5b & +6c & +9d & = 10 \end{array}$$

(Indicazione: se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, non saranno necessari denominatori.)

$\boxed{A}$

$$x = e^t \qquad\qquad t = \log x$$

$$dx = e^t \, dt \qquad\qquad dt = dx/e^t$$

$$= dx/x$$

$$\int \frac{1}{e^{2t} + 3e^{2t} + 2} \, dt =$$

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2} \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x(x+1)(x+2)} \, dx$$

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$1 = A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)$$

Mettiamo $x=0$

$$1 = A \cdot 1 \cdot 2 + 0 + 0 \rightsquigarrow A = \frac{1}{2}$$

Mettiamo $x=-1$

$$1 = 0 + B(-1)(1) + 0 \rightsquigarrow B = -1$$

Mettiamo $x=-2$

$$1 = 0 + 0 + C(-2)(-1) \rightsquigarrow C = \frac{1}{2}$$

p. 218

$$\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \int \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log x - \log(x+1) + \frac{1}{2}\log(x+2)$$

$$= \frac{1}{2}\log(e^t) - \log(e^t+1) + \frac{1}{2}\log(e^t+2)$$

$$= \frac{1}{2}t - \log(e^t+1) + \frac{1}{2}\log(e^t+2)$$

$\boxed{B}$ $x^2+y^2+z^2 \le R^2 \rightsquigarrow r^2+z^2 \le R^2 \rightsquigarrow r^2 \le R^2-z^2$

$\rightsquigarrow 0 \le r \le \sqrt{R^2-z^2}$

$$\iiint_V 1\,dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=B}^{A}\int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{z=B}^{A} \frac{r^2}{2}\Big]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-z^2}} dz\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{z=B}^{A} R^2-z^2\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2z - \frac{z^3}{3}\Big]_{z=B}^{A}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2(A-B) - \frac{1}{3}(A^3-B^3)$$

$$= \pi R^2 (A - B) - \frac{\pi}{3}(A^3 - B^3)$$

$$\iiint_Q z \, dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=B}^{A} \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} z r \, dr \, dz \, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_{z=B}^{A} R^2 z - z^3$$

$$= \pi \left(\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Big]_{z=B}^{A}$$

$$= \frac{\pi R^2}{2}(A^2 - B^2) - \frac{\pi}{4}(A^4 - B^4)$$

$$\cancel{\bar{z} = \frac{\pi R^2(A-B) - \frac{\pi}{3}(A^3-B^3)}{\frac{\pi R^2}{2}(A^2-B^2) - \frac{\pi}{4}(A^4-B^4)} = \frac{\pi\left(R^2(A-B) - \frac{1}{3}(A^3-B^3)\right)}{\pi\left(\frac{R^2}{2}(A}}$$

$$\bar{z} = \frac{\frac{\pi R^2}{2}(A^2 - B^2) - \frac{\pi}{4}(A^4 - B^4)}{\pi R^2 (A - B) - \frac{\pi}{3}(A^3 - B^3)}$$

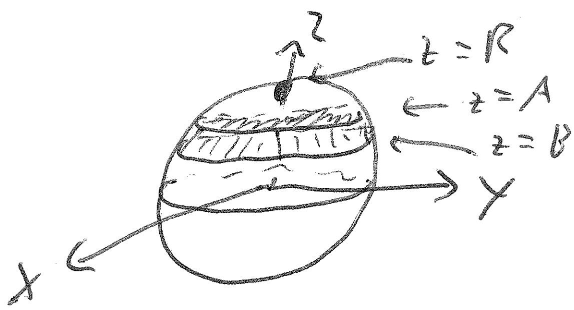
$$= \frac{\pi \left(\frac{R^2}{2}(A^2 - B^2) - \frac{1}{4}(A^4 - B^4) \right)}{\pi \left(R^2 (A - B) - \frac{1}{3}(A^3 - B^3) \right)}$$

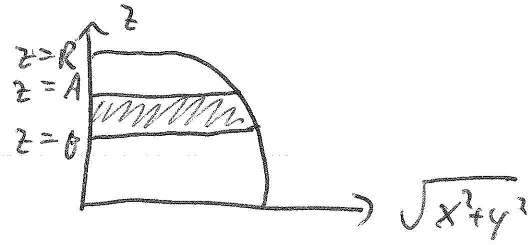
$$= \frac{\frac{R^2}{2}(A^2 - B^2) - \frac{1}{4}(A^4 - B^4)}{R^2(A-B) - \frac{1}{3}(A^3 - B^3)}$$

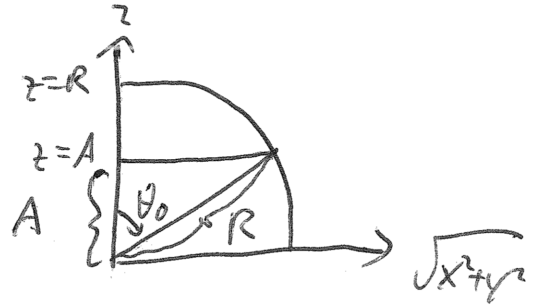
$$= \frac{(A-B)\left(\frac{R^2}{2}(A+B) - \frac{1}{4}(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)\right)}{(A-B)\left(R^2 - \frac{1}{3}(A^2 + AB + B^2)\right)}$$

$$= \frac{\frac{R^2}{2}(A+B) - \frac{1}{4}(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)}{R^2 - \frac{1}{3}(A^2 + AB + B^2)}$$

$\boxed{C}$







$$\cos\theta_0 = \frac{AV}{1P} = \frac{A}{R}$$

$$\theta_0 = \arccos\frac{A}{R}$$

p. 5/8

$$x^2+y^2+z^2 \le R^2 \rightsquigarrow r^2 \le R^2 \rightsquigarrow 0 \le r \le R$$

$$A \le z \rightsquigarrow A \le r\cos\theta \rightsquigarrow A/\cos\theta \le r$$

$$\frac{A}{\cos\theta} \le r \le R$$

Poi, $\frac{A}{\cos\theta} \le R \rightsquigarrow \frac{A}{R} \le \cos\theta$

$$\rightsquigarrow \arccos\left(\frac{A}{R}\right) \ge \theta$$

$$\rightsquigarrow \theta_0 \ge \theta$$

(1) $$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ A \le z}} 1 \, dV$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \int_{r=A/\cos\theta}^{R} r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta_0} \left. \frac{r^3}{3} \operatorname{sen}\theta \right]_{r=A/\cos\theta}^{r=R} d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_{\theta=0}^{\theta_0} R^3 \operatorname{sen}\theta - \frac{A^3 \operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(-R^3\cos\theta - \frac{A^3}{2}\cos^{-2}\theta\right)\Big]_{\theta=0}^{\theta=\theta_0 = \arccos A/R}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(-R^3\cdot\frac{A}{R} + R^3 - \frac{A^3}{2}\left(\frac{A}{R}\right)^{-2} + \frac{A^3}{2}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(-R^2A + R^3 - \frac{AR^2}{2} + \frac{A^3}{2}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(-\frac{3}{2}R^2A + R^3 + \frac{A^3}{2}\right)$$

$$= -\pi R^2 A + \frac{2\pi}{3}R^3 + \frac{\pi}{3}A^3$$

(2) Per <u>analogia</u>

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le R^2 \\ z\ge B}} 1\, dV = -\pi R^2 B + \frac{2\pi}{3}R^3 + \frac{\pi}{3}B^3$$

(3) Per sottrazione

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le R^2 \\ z\ge B}} 1\, dV$$

p. 7/8

$$= \left(-\pi R^2 B + \frac{2\pi}{3} R^3 + \frac{\pi}{3} B^3\right)$$

$$- \left(-\pi R^2 A + \frac{2\pi}{3} R^3 + \frac{\pi}{3} A^3\right)$$

$$= \boxed{\pi R^2 (A-B) - \frac{\pi}{3}(A^3 - B^3)}$$

$\boxed{D}$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & = \text{cost.} \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 9 & 10 \end{array} \xrightarrow[E4 \leftarrow E4 - 4E1]{\substack{E2 \leftarrow E2 - 2E1 \\ E3 \leftarrow E3 - 3E1}}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -9 \\ 0 & -3 & -6 & -11 & -14 \end{array} \xrightarrow{E2 \leftarrow -E2} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -9 \\ 0 & -3 & -6 & -11 & -14 \end{array}$$

$$\xrightarrow[\substack{E3 \leftarrow E1 + 2E2 \\ E4 \leftarrow E4 + 3E2}]{E1 \leftarrow E1 - 2E2} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \xrightarrow{E3 \leftarrow \frac{1}{3} E3}$$

si deve saltare questa colonna

p. 8/8

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[E4 \leftarrow E4 - E3]{\substack{E1 \leftarrow E1 + 3E3 \\ E2 \leftarrow E2 - 4E3}}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} a \quad\quad -c = -1 \\ b + 2c = 1 \\ d = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = c - 1 \\ b = -2c + 1 \\ c = c \\ d = 1 \end{cases}$$

sempre vero

parametrizzazione con parametro c