Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 3 settembre 2015

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato. È a disposizione anche una tavola per la distribuzione normale standardizzata.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione giovedì 10 settembre, alle 8.30, al ex-dipartimento di Botanica, Piandanna, 2° Piano, e le prove orali cominceranno subito dopo.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

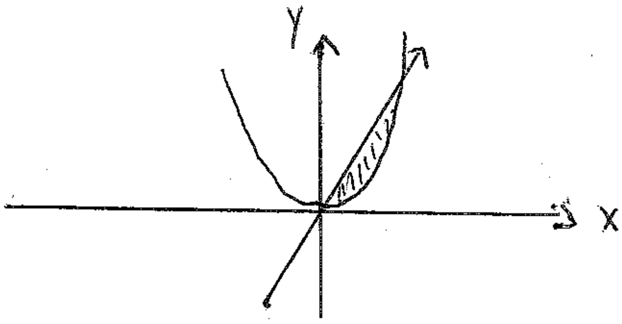
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

**A.** Calcolare

$$\int \frac{u^5}{u^3+1}\,du$$

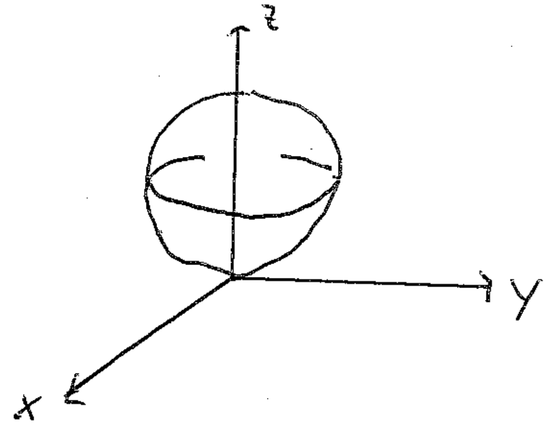
**B.** Usare le coordinate polari e calcolare l'area della zona $\mathcal{A}$ definita da

$$x^2 \leq y \leq 2x$$




**C.** Sia $R > 0$ una costante. Usare le coordinate cilindriche e calcolare la media di $z^2$ sulla sfera $\mathcal{S}$ definita da:

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$$




**D.** Sia $q$ una costante. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{array}{llll} a & +b & +c & = 1 \\ a & +qb & +q^2c & = q^3 \\ a & +q^2b & +q^4c & = q^6 \end{array}$$

per le incognite $a$, $b$, e $c$. (Indicazione: evidentemente, tutti i coefficienti saranno polinomi in $q$. Conviene fattorizzare il più possibile quei polinomi.)

A

$$\begin{array}{l|l} u^5 & u^3+1 \\ \hline u^5+u^2 & u^2 \\ \hline -u^2 & \end{array}$$

$$u^5 = u^2(u^3+1) - u^2$$

$$\frac{u^5}{u^3+1} = u^2 - \frac{u^2}{u^3+1}$$

$u^3+1$ ha la radice $u=-1$, quindi il fattore $u+1$

$$\begin{array}{l|l} u^3+ \qquad\qquad 1 & u+1 \\ \hline u^3+u^2 & u^2-u+1 \\ \hline -u^2 & \\ -u^2-u & \\ \hline u+1 & \end{array}$$

$$u^3+1 = (u+1)(u^2-u+1)$$

$$\frac{u^2}{u^3+1} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u^2-u+1} + \frac{C(2u-1)}{u^2-u+1}$$

$$u^2 = A(u^2-u+1) + B(u+1) + C(2u-1)(u+1)$$

2/6

Si inserisce $u=-1$

$$1 = A(1+1+1) + B\cdot 0 + C\cdot 0$$

$$\rightsquigarrow \quad A = \frac{1}{3}$$

$$u^2 = \frac{1}{3}(u^2-u+1) + B(u+1) + C(2u^2+u-1)$$

$$= \left(\frac{1}{3}+2C\right)u^2 + \left(-\frac{1}{3}+B+C\right)u + \left(\frac{1}{3}+B-C\right)$$

$$\to \begin{cases} \frac{1}{3}+2C=1 \\ -\frac{1}{3}+B+C=0 \\ \frac{1}{3}+B-C=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} C=\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}+B+\frac{1}{3}=0 \\ \frac{1}{3}+B-\frac{1}{3}=0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad C=\frac{1}{3} \qquad B=0$$

$$\int \frac{u^5}{u^3+1}\,du = \int u^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{u+1} + \frac{1}{3}\frac{2u-1}{u^2-u+1}\,du$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{3}\log(u+1) + \frac{1}{3}\log(u^2-u+1)}$$

3 / 6

$\boxed{B}$ $x^2 \leq y \leq 2x$

$\rightarrow (r\cos\theta)^2 \leq r \operatorname{sen}\theta \leq 2r\cos\theta$

$$\rightarrow \begin{cases} r^2\cos^2\theta \leq r\operatorname{sen}\theta \\ r\operatorname{sen}\theta \leq 2r\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r \leq \operatorname{sen}\theta/\cos^2\theta \\ \operatorname{tg}\theta \leq 2 \end{cases}$$

$$\iint_A 1\, dA = \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \left( \int_0^{\operatorname{sen}\theta/\cos^2\theta} 1 \cdot r\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{1}{2} \left( \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} \right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^4\theta}\, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^4\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \sec^4\theta - \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}\sec^2\theta \operatorname{tg}\theta + \frac{2}{3}\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\theta \right)_{\theta=0}^{\operatorname{arctg} 2}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}\sec^2\theta \operatorname{tg}\theta - \frac{1}{3}\operatorname{tg}\theta \right)_{\theta=0}^{\operatorname{arctg} 2}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}(2^2+1) \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$\boxed{C}$ $x^2+y^2+(z-R)^2 \leq R^2$

$\rightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 2zR$

$\rightarrow r^2+z^2 \leq 2zR$

$\rightarrow r \leq \sqrt{2zR-z^2}$

$\iiint_S 1 \, dV =$ volume della sfera $= \frac{4\pi R^3}{3}$

$\iiint_S z^2 \, dV$

$= \int_0^{2R} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2zR-z^2}} z^2 r \, dr \right) d\theta \right) dz$

$= \frac{1}{2} \int_0^{2R} \left( \int_0^{2\pi} z^2 (2zR - z^2) \, d\theta \right) dz$

$= \pi \int_0^{2R} 2z^3R - z^4 \, dz$

$= \pi \left( \frac{2}{4}(2R)^4 R - \frac{1}{5}(2R)^5 \right)$

5/6

$$= \pi R^5 \left( 8 - \frac{32}{5} \right) = \pi R^5 \left( \frac{8}{5} \right)$$

$$\overline{z^2} = \frac{\pi R^5 (8/5)}{\pi R^3 (4/3)} = \frac{8}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot R^2 = \boxed{\frac{6}{5} R^2}$$

$\boxed{b}$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & = \text{cost.} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & q^2 & q^3 \\ 1 & q^2 & q^4 & q^6 \end{array} \xrightarrow[R3 \leftarrow R3 - R1]{R2 \leftarrow R2 - R1}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & q-1 & q^2-1 & q^3-1 \\ 0 & q^2-1 & q^4-1 & q^6-1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & q-1 & (q-1)(q+1) & (q-1)(q^2+q+1) \\ 0 & q^2-1 & (q^2-1)(q^2+1) & (q^2-1)(q^4+q^2+1) \end{array}$$

si suppone $q \neq \pm 1$ $\xrightarrow[R3 \leftarrow R3/(q^2-1)]{R2 \leftarrow R2/(q-1)}$

6/6

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & q+1 & q^2+q+1 \\ 0 & 1 & q^2+1 & q^4+q^2+1 \end{matrix} \xrightarrow[R3 \leftarrow R3-R2]{R1 \leftarrow R1-R2}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -q & -q^2-q \\ 0 & 1 & q+1 & q^2+q+1 \\ 0 & 0 & q^2-q & q^4-q \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -q & -q(q+1) \\ 0 & 1 & q+1 & q^2+q+1 \\ 0 & 0 & q(q-1) & q(q-1)(q^2+q+1) \end{matrix} \xrightarrow{R3 \leftarrow R3/(q(q-1))}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -q & -q(q+1) \\ 0 & 1 & q+1 & q^2+q+1 \\ 0 & 0 & 1 & q^2+q+1 \end{matrix} \xrightarrow[R2 \leftarrow R2-(q+1)R3]{R1 \leftarrow R1+qR3}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & q^3 \\ 0 & 1 & 0 & -q(q^2+q+1) \\ 0 & 0 & 1 & q^2+q+1 \end{matrix} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= q^3 \\ b &= -q(q^2+q+1) \\ c &= q^2+q+1 \end{aligned}}$$