DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 7 luglio 2015

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici*. È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato. È a disposizione anche una tavola per la distribuzione normale standardizzata.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione dopodomani, giovedì 9 luglio, alle 8.30, al ex-dipartimento di Botanica, Piandanna, 2° Piano, e le prove orali cominceranno subito dopo.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

A. Calcolare

$$\int \frac{r^6}{(r^2+1)^4}\,dr$$

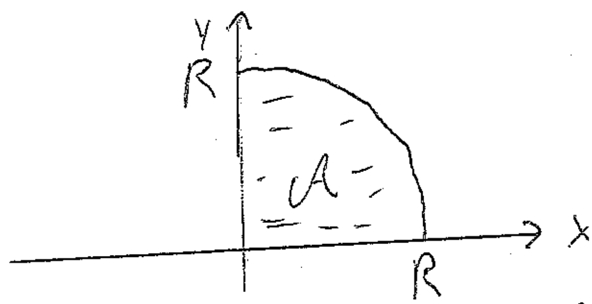
(Indicazione: per questo esercizio è molto più veloce procedere subito alla sostituzione trigonometrica, invece di cominciare con la divisione in pezzi dell'integranda.)

B. Sia $R > 0$ una costante. Si considera la zona $\mathcal{A}$ definita da

$$x^2 + y^2 \leq R^2 \qquad\qquad x, y \geq 0$$

Usare le coordinate polari e calcolare:

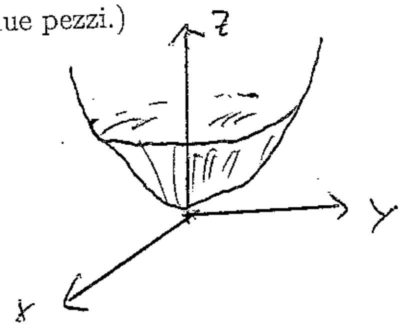
$$\iint_{\mathcal{A}} x^3 y \, e^{-(x^2+y^2)/2} \, dA$$

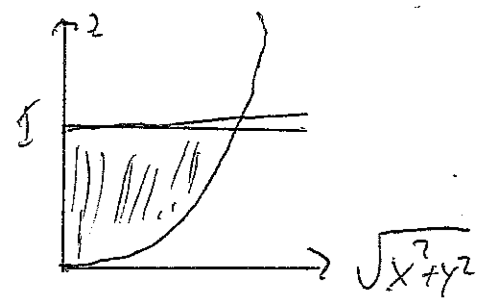


C. Usare le coordinate sferiche e calcolare il volume della forma definita da:

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1$$

(Indicazione: per l'integrazione $d\theta$, occorre dividere l'intervallo di'integrazione in due pezzi.)





D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{array}{llll} a & +b & +c & = 1 \\ a & +2b & +4c & = 8 \\ a & +4b & +16c & = 64 \end{array}$$

(Indicazione: se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, non saranno necessari denominatori.)

(A) $u = tg\,x$

$u^2+1 = tg^2 x + 1 = sec^2 x$

$du = sec^2 x\, dx$

$$\int \frac{u^6}{(u^2+1)^4}\, du = \int \frac{(tg\,x)^6}{(sec^2 x)^4}\, sec^2 x\, dx$$

$$= \int \frac{tg^6 x}{sec^6 x}\, dx = \int sen^6 x\, dx$$

$$= -\frac{1}{6} \cos x\, sen^5 x - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cos x \cdot sen^3 x$$

$$- \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cos x\, sen\,x + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\, x$$

$x = arctg\,u$ $\rightarrow$ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$

$sec\,x = \sqrt{u^2+1}$ $\rightarrow$ $sen\,x = tg\,x \cdot \cos x = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$

$$\int \frac{u^6}{(u^2+1)^4}\, du = -\frac{1}{6} \frac{u^5}{(u^2+1)^3} - \frac{5}{24} \frac{u^3}{(u^2+1)^2} - \frac{5}{48} \frac{u}{u^2+1} + \frac{5}{48}\, arctg\, u$$

2/5

(B)
$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left(\int_0^R (r\cos\theta)^3 (r\,\mathrm{sen}\,\theta) e^{-r^2/2} \, r\,dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \,\mathrm{sen}\,\theta \left(\int_0^R r^5 e^{-r^2/2} dr \right) d\theta$$

$$\Big[\int_0^R r^5 e^{-r^2/2} dr = \int_0^R r^4 \cdot r e^{-r^2/2} dr$$

$$= r^4 \cdot \left(-e^{-r^2/2}\right)\Big]_0^R + 4\int_0^R r^3 e^{-r^2/2} dr$$

$$= -R^4 e^{-R^2/2} - 4R^2 e^{-R^2/2} + 8\int_0^R r e^{-r^2/2} dr$$

$$= -R^4 e^{-R^2/2} - 4R^2 e^{-R^2/2} - 8e^{-R^2/2} + 8 \Big]$$

$$\Big[\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \,\mathrm{sen}\,\theta \, d\theta = -\frac{1}{4}\cos^4\theta \Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4} \Big]$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\left((-R^4 - 4R^2 - 8)e^{-R^2/2} + 8 \right)}$$

c) $x^2+y^2 \le z \le 1$

$\hookrightarrow r^2 \operatorname{sen}^2\theta \le r\cos\theta \le 1$

$\hookrightarrow r \le \cos\theta/\operatorname{sen}^2\theta$ e $r \le \dfrac{1}{\cos\theta}$

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \le \frac{1}{\cos\theta} \iff \cos^2\theta \le \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\iff \cos\theta \le \operatorname{sen}\theta$$
$$\iff \theta \ge \frac{\pi}{4}$$

[Si osserva: $0 \le \theta \le \pi$ sempre,
e $0 \le x^2+y^2 \le z \le r\cos\theta$
implica $\theta \le \frac{\pi}{2}$.]

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}\int_{r=0}^{r=1/\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{3}\cos^{-2}\theta \Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} = \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{2}^2 - 1^2\right) = \frac{\pi}{3}$$

4 / 5

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=0}^{r=\cos\theta/\operatorname{sen}^2\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{3} \frac{\cos^3\theta}{\operatorname{sen}^6\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,(1-\operatorname{sen}^2\theta)}{\operatorname{sen}^5\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(-\frac{1}{4} \operatorname{sen}^{-4}\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-2}\theta \right)_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(-\frac{1}{4} \left(1-(\sqrt{2})^4\right) + \frac{1}{2} \left(1-(\sqrt{2})^2\right) \right)$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{6}$$

$$\iiint_{x^2+y^2 \leq z \leq 1} 1 \, dV = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

5/5

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & = \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 15 & 63 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 42 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

$a = 8$
$b = -14$
$c = 7$

$a+b+c = 8+(-14)+7 = 1$
$a+2b+4c = 8+(-28)+28 = 8$ ✓
$a+4b+16c = 8+(-56)+112 = 64$