DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 23 giugno 2015

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici*. È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione dopodomani, giovedì 25 giugno, alle 15.30, al ex-dipartimento di Botanica, Piandanna, 2° Piano, e le prove orali cominceranno subito dopo.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

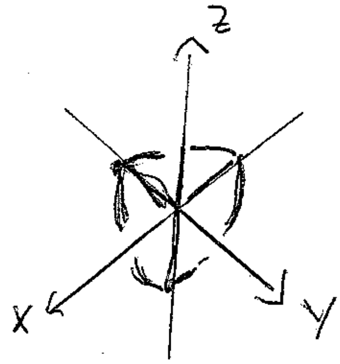
$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

A. Calcolare

$$\int \frac{6}{(u^2+1)(u^2+2)(u^2+3)}\,du$$

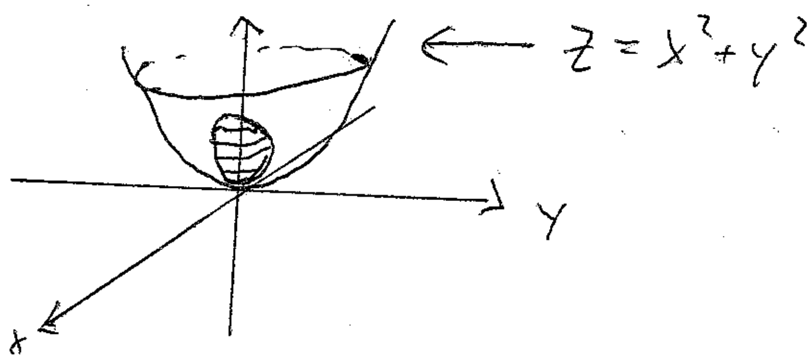
B. Sia $R > 0$ una costante. Usare le coordinate sferiche e calcolare la media della funzione xyz sul volume definito da:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \qquad\qquad x, y, z \leq 0$$



C. Usare le coordinate cilindriche e calcolare il volume della forma definita da:

$$x^2 + y^2 \leq z \leq x$$



D. Usare il metodo di Gauss–Jordan trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 16 \\ a + b - c - d &= 12 \\ a + c - b - d &= 8 \\ a + d - b - c &= 4 \end{aligned}$$

(Indicazione: se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, non saranno necessari denominatori.)

(A) $$\frac{6}{(v+1)(v+2)(v+3)} = \frac{A}{v+1} + \frac{B}{v+2} + \frac{C}{v+3}$$

$$6 = A(v+2)(v+3) + B(v+1)(v+3) + C(v+1)(v+2)$$

$$v=-1 \rightsquigarrow 6 = A\cdot 1\cdot 2 + 0 + 0 \rightsquigarrow A = 3$$
$$v=-2 \rightarrow 6 = 0 + B\cdot(-1)\cdot 1 \rightarrow B = -6$$
$$v=-3 \rightsquigarrow 6 = 0 + 0 + C\cdot(-2)\cdot(-1) \rightsquigarrow C = 3$$

$$\int \frac{6}{(u^2+1)(u^2+2)(u^2+3)}\,du$$

$$= \int \frac{3}{u^2+1} - \frac{6}{u^2+2} + \frac{3}{u^2+3}\,du$$

$$= 3\,\mathrm{arctg}\,u - \frac{6}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)$$

(B) La zona d'interesse è l'ottava parte della sfera, quindi il volume è $\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{\pi}{6}R^3$

$$\iiint_{\theta} xyz \, dV$$

$$= \int_{\varphi=\pi}^{\varphi=3\pi/2} \left(\int_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} (r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi) \cdot (r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi) \cdot (r \cos\theta) \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=\pi}^{\varphi=3\pi/2} \left(\int_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} r^5 \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, dr \right) d\theta \Big) d\varphi$$

$$= \frac{R^6}{6} \int_{\varphi=\pi}^{\varphi=3\pi/2} \left(\int_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\theta \right) d\varphi$$

$$= \frac{R^6}{6} \left. \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2} \right]_{\varphi=\pi}^{\varphi=3\pi/2} \left. \frac{\operatorname{sen}^4\theta}{4} \right]_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi}$$

$$= \frac{R^6}{6 \cdot 2 \cdot 4} \left((-1)^2 - 0^2 \right) \left(0^4 - 1^4 \right) = \frac{-R^6}{48}$$

$$\overline{xyz} = \frac{-R^6/48}{\pi R^3/6} = -\frac{1}{8\pi}R^3$$

Per quanto riguarda i limiti d'integrazione:

$$x^2+y^2+z^2 \le R^2 \rightsquigarrow r \le R$$

$$z \le 0 \to r\cos\theta \le 0 \to \cos\theta \le 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$$

$$x, y \le 0 \to r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \le 0$$

$$\to \cos\varphi,\ \mathrm{sen}\,\varphi \le 0 \to \pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$$

(c) $x^2+y^2 \le z \le x$

$$\rightsquigarrow r^2 \le z \le r\cos\theta$$

$$\iiint_{\mathcal{F}} I\, dV$$

$$= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\left(\int_{r=0}^{r=\cos\theta}\left(\int_{z=r^2}^{z=r\cos\theta} I\cdot r\,dz\right)dr\right)d\theta$$

4/5

$r^2 \leq r\cos\theta \rightarrow r \leq \cos\theta$

dà i limiti per r

$0 \leq \cos\theta \rightsquigarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

dà i limiti per θ.

$$\iiint_{J} f \, dV = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^{r=\cos\theta} r\,(r\cos\theta - r^2)\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\cos^3\theta \cdot \cos\theta - \frac{1}{4}\cos^4\theta \; d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12}\cos^4\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4} \cdot \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos^0\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{32}$$

5/5

a b c d =

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -12 \end{matrix}$$

$$\to \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -12 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -12 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{matrix}$$

$$\to \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{matrix}$$

$$\to \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$\to$ $a = 10$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 0$