Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 9 aprile 2015

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 15.30 alle ore 18.30. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione lunedì 13 aprile, alle 12.00, a Piandanna, ex-dipartimento di Botanica, 2° Piano.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

A. Calcolare

$$\int \frac{t^3+1}{t^4+2t^3+t^2}\,dt$$

B. Calcolare

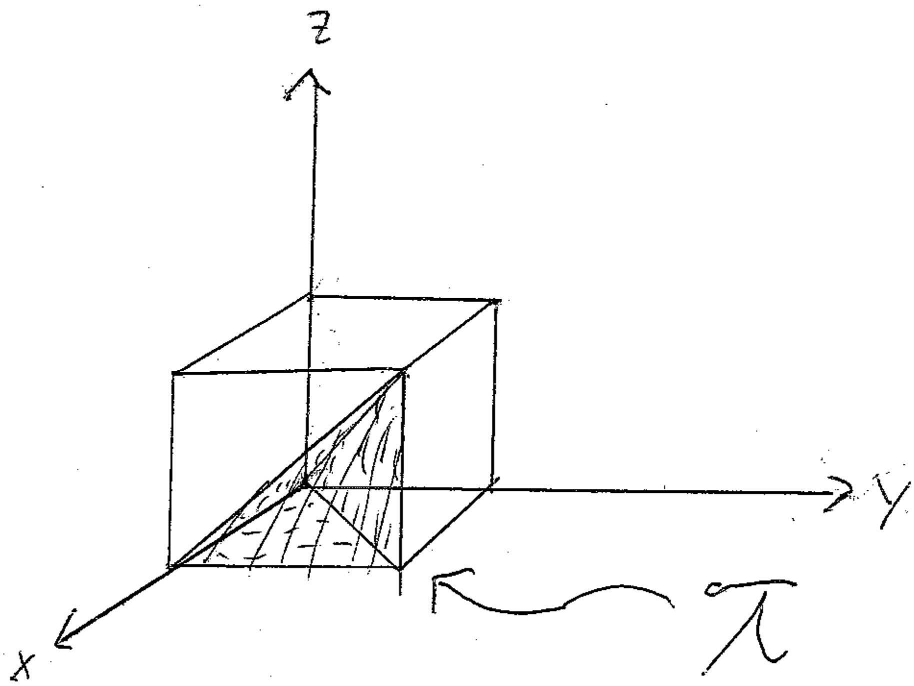
$$\int_0^A \left(\int_y^A \cos(x^2)\, dx \right) dy$$

Indicazione: il solo modo di fare questo calcolo è di cambiare l'ordine d'integrazione — prima integrazione dy, poi integrazione dx.

C. Sia $\mathcal{T}$ il tetraedro determinato da

$$0 \leq z \leq y \leq x \leq 1$$

Usare le *coordinate cilindriche* e calcolare il volume di $\mathcal{T}$.



D. Usare il metodo di Gauss–Jordan ed esprimere p, q, e r in termini di s, t, e u.

$$\begin{array}{rrrl} p & +2q & & =s \\ 2p & +q & +2r & =t \\ & 2q & +r & =u \end{array}$$

(Indicazione: nella risposta finale si trovano frazioni con il denominatore 7.)

(A) $$\frac{t^3+1}{t^4+2t^3+t^2} = \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t^2(t^2+2t+1)}$$

$$= \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t^2(t+1)^2} = \frac{t^2-t+1}{t^2(t+1)}$$

$$= \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1}$$

$$\rightsquigarrow At(t+1) + B(t+1) + Ct^2 = t^2 - t + 1$$

$t=0 \rightsquigarrow B\cdot 1 = 1 \rightsquigarrow B = 1$

$t=-1 \rightarrow C\cdot 1 = 1+1+1 = 3 \rightarrow C = 3$

$$At^2 + At + t + 1 + 3t^2 \stackrel{!}{=} t^2 - t + 1$$

$\rightsquigarrow A+3 = 1 \rightsquigarrow A = -2$

$A+1 = -1$

$1 = 1$

$$\int \frac{t^3+1}{t^4+2t^3+t^2}\,dt = \int -\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{3}{t+1}\,dt$$

$$= -2\log t - 1/t + 3\log(t+1)$$

(B) $$\int_0^A \left(\int_y^A \cos(x^2)\, dx \right) dy$$

$$= \iint_{0 \le y \le x \le A} \cos(x^2)\, dA$$

$$= \int_0^A \left(\int_0^x \cos(x^2)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^A x \cos(x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x^2) \Big|_{x=0}^{x=A} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(A^2)$$

(C) $$0 \le z \le y \le x \le 1$$

$$\rightsquigarrow 0 \le z \le r \operatorname{sen}\theta \le r \cos\theta \le 1$$

$$\rightsquigarrow \begin{Bmatrix} 0 \le z \le r \operatorname{sen}\theta \\ 0 \le \operatorname{sen}\theta \le \cos\theta \\ r \le 1/\cos\theta \end{Bmatrix} \rightsquigarrow \begin{Bmatrix} 0 \le z \le r \operatorname{sen}\theta \\ 0 \le \theta \le \pi/4 \\ 0 \le r \le 1/\cos\theta \end{Bmatrix}$$

3/4

$$\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{1/\cos\theta}\left(\int_0^{r \operatorname{sen}\theta} r \, dz\right) dr\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{1/\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{6} (\cos\theta)^{-2}\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{(1/\sqrt{2})^2} - \frac{1}{1^2}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1/2} - 1\right] = \frac{1}{6}\left[2-1\right] = \frac{1}{6}\cdot 1$$

$$= \frac{1}{6}$$

D

p	q	r	=	s	t	u
1	2	0		1	0	0
2	1	2		0	1	0
0	2	1		0	0	1

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 4/3 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 & -4/3 & 2/3 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 4/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/7 & 2/7 & 3/7 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 3/7 & 2/7 & -4/7 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -1/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & -4/7 & 2/7 & 3/7 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{aligned} p &= \frac{3}{7}s + \frac{2}{7}t - \frac{4}{7}u \\ q &= \frac{2}{7}s - \frac{1}{7}t + \frac{2}{7}u \\ r &= \frac{-4}{7}s + \frac{2}{7}t + \frac{3}{7}u \end{aligned}$$