Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 13 febbraio 2014

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente. I compiti corretti saranno a disposizione domani 14 febbraio alle 16.00 al Palazzo Didattico di via Vienna, 1° piano.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad\qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad\qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

A. Usare la sostituzione $y = \mathrm{sen}\,t$ per il calcolo di:

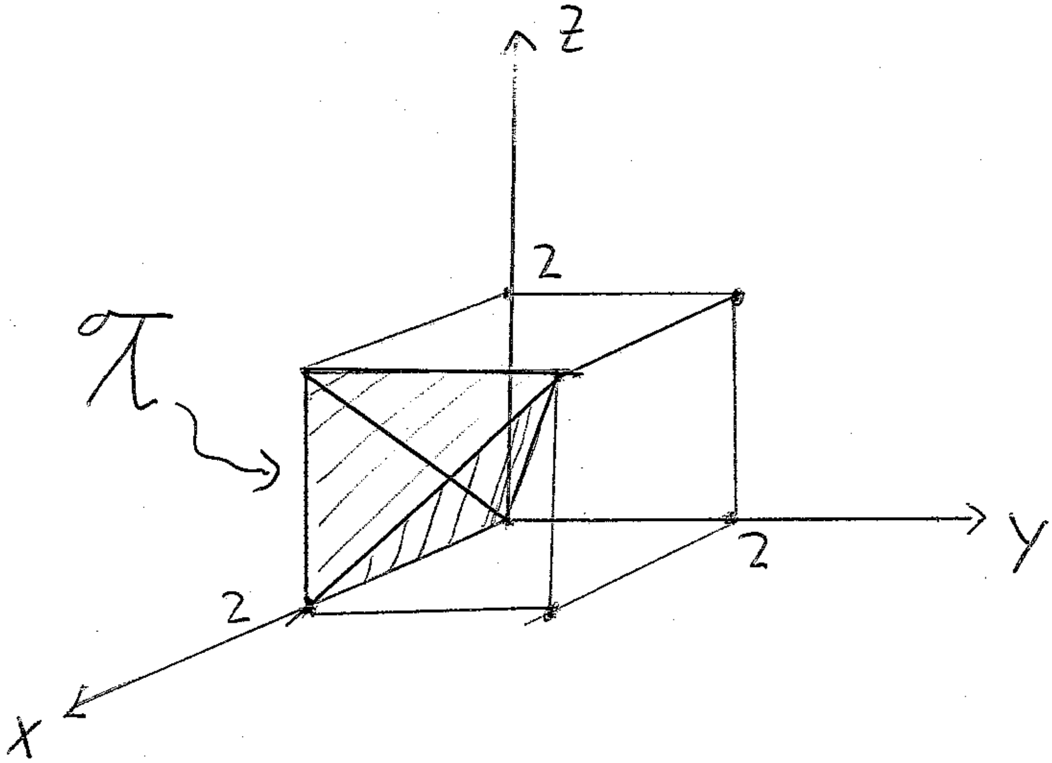
$$\int \frac{1}{(1-y^2)^2}\,dy$$

B. Siano A e B due parametri costanti. Calcolare la media di

$$(Ax + By)^4 \quad \text{sul disco } \mathcal{D} \text{ determinato da} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

C. Usare le coordinate cilindriche e calcolare il volume del tetraedro $\mathcal{T}$ determinato da

$$0 \leq y \leq z \leq x \leq 2$$



D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e risolvere il sistema:

$$\begin{array}{llllll} p & +q & +r & +s & +t = & 0 \\ p & +2q & +3r & +4s & +5t = & 0 \\ p & +4q & +9r & +16s & +25t = & 0 \end{array}$$

per le incognite p, r, e t in termini dei valori noti q e s.

V3

(A)

$$\int \frac{1}{(1-y^2)^2}\,dy = \int \frac{1}{(\cos^2 t)^2}\cos t\,dt$$

$$= \int \sec^3 t\,dt = \frac{1}{2}\left(\sec t\,\operatorname{tg} t + \log|\sec t + \operatorname{tg} t|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{1-y^2} + \log\left(\frac{1+y}{\sqrt{1-y^2}}\right)\right)$$

$y = \operatorname{sen} t \qquad dy = \cos t\,dt$

$1-y^2 = \cos^2 t \qquad \cos t = \sqrt{1-y^2}$

$\sec t = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \operatorname{tg} t = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

(B)

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} (r\cos t)^4\, r\,dt\,dr = \int_0^1 r^5\,dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos^4\theta\,dt$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi} 1\,dt = \frac{6\pi}{6\cdot 8} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} (r\cos\theta)^3(r\operatorname{sen} t)\,r\,dt\,dr = \frac{1}{6}\cdot -\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_{\theta=0}^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} (r\cos t)(r\operatorname{sen}\theta)^3\,r\,dt\,dr = 0$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} (r\operatorname{sen}\theta)^4\,r\,dt\,dr = \frac{\pi}{8}$$

2/3

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r\cos\theta)^2 (r\,\text{sen}\,\theta)^2 \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta (1-\cos^2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\pi - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{24}$$

$$\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \big(A^4 (r\cos\theta)^4 + 4A^3B (r\cos\theta)^3 (r\,\text{sen}\,\theta)$$

$$+ 6A^2B^2 (r\cos\theta)^2 (r\,\text{sen}\,\theta)^2 + 4AB^3 (r\cos\theta)(r\,\text{sen}\,\theta)^3$$

$$+ B^4 (r\,\text{sen}\,\theta)^4 \big) \, r \, dr \Big) \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{8} A^4 + \frac{6\pi}{24} A^2B^2 + \frac{\pi}{8} B^4 = \frac{\pi}{8}(A^4 + 2A^2B^2 + B^4)$$

$$= \frac{\pi}{8}(A^2+B^2)^2 \rightsquigarrow \frac{1}{8}(A^2+B^2)^2 \text{ come media}$$

c) $0 \le y \le x \le 2 \rightsquigarrow 0 \le r\,\text{sen}\,\theta \le r\cos\theta \le 2$

$$\rightsquigarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \quad e \quad r \le \frac{2}{\cos\theta}$$

$$y \le z \le x \longrightarrow r\,\text{sen}\,\theta \le z \le r\cos\theta$$

$$\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2/\cos\theta} \left(\int_{r\,\text{sen}\,\theta}^{r\cos\theta} 1 \cdot r \, dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2/\cos\theta} r^2\cos\theta - r^2\,\text{sen}\,\theta \, dr \right) d\theta$$

3/3

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3}\frac{8}{\cos^2\theta}\cos\theta - \frac{1}{3}\frac{8}{\cos^3\theta}\,\text{sen}\,t\; dt$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\left[\text{tg}\,\theta - \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\theta}\right]_0^{\pi/4} = \frac{8}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\cdot 2\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\cdot 1\right)\right]$$

$$= \frac{8}{3}\left[1 - 1 + 0 + \frac{1}{2}\right] = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

D

$$p + m + t = -q - s$$
$$p + 3m + 5t = -2q - 4s$$
$$p + 9m + 25t = -4q - 16s$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & -4 \\ 1 & 9 & 25 & -4 & -16 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 8 & 24 & -3 & -15 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 8 & 24 & -3 & -15 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & -1/2 & +1/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 8 & +1 & -3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & -1/2 & +1/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & -3/8 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -3/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -6/8 & -6/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & -3/8 \end{matrix} \longrightarrow \begin{aligned} p &= -3/8\,q + 1/8\,s \\ m &= -6/8\,q - 6/8\,s \\ t &= +1/8\,q - 3/8\,s \end{aligned}$$