DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 15 luglio 2024

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

A. Usare la sostituzione $t = \mathrm{tg}\,x$ e calcolare

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt$$

B. Siano $0 \le A \le R$ due parametri fissi. Usare le coordinate *cilindriche* e calcolare il volume della calotta C determinata dalle disuguaglianze:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \qquad z \ge A$$

C. Sia $\mathcal{C}$ la stessa calotta descritta nell'esercizio **B**. Sia E un parametro fisso. Usare le *coordinate sferiche* e calcolare

$$\iiint_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2 + z^2)^{E/2}\, dV$$

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned} r + 3s &= 9 \\ q + 3r + 6s &= 16 \\ p + s &= 4 \\ 3p + q &= 1 \end{aligned}$$

(Indicazione: Se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, non saranno necessari denominatori.)

1/9

$\boxed{A}$

$$t = \operatorname{tg} x$$
$$t^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$
$$dt = \sec^2 x \; dx$$

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^3}\, dt = \int \frac{1}{(\sec^2 x)^3} \sec^2 x \; dx$$

$$= \int \frac{1}{\sec^4 x}\, dx = \int \cos^4 x \; dx$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen} x \cos^3 x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \; dx$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen} x \cos^3 x + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2} \int 1 \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen} x \cos^3 x + \frac{3}{8} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{3}{8} x$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cos^4 x + \frac{3}{8} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cos^2 x + \frac{3}{8} x$$

2/9

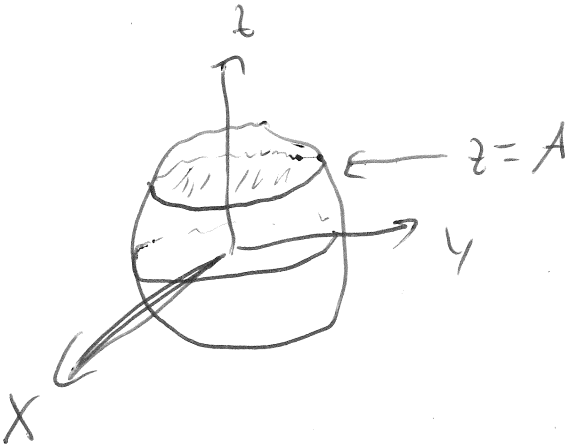
$x = \operatorname{arctg} t$

$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = t$

$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{t^2+1}$

$$= \frac{1}{4} t \frac{1}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{8} t \frac{1}{(t^2+1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t$$

$\boxed{B}$



sfera di raggio R

$$x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \rightsquigarrow \rho^2 + z^2 \leq R^2$$

$$\rightarrow \rho^2 \leq R^2 - z^2 \rightsquigarrow \rho \leq \sqrt{R^2-z^2}$$

3/9

$$\iiint_{C} 1 \, dV$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{z=A}^{R} \left(\int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} 1 \cdot r \, dr \right) dz \right) d\theta$$

$$= 2\pi \left(\int_{z=A}^{R} \frac{r^2}{2} \Big]_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} dz \right)$$

$$= \pi \int_{z=A}^{R} R^2 - z^2 \, dz$$

$$= \pi \left(R^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big]_{z=A}^{R}$$

$$= \pi \left(R^2 R - \frac{R^3}{3} - R^2 A + \frac{A^3}{3} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{2}{3} R^3 - R^2 A + A^3 \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(2R^3 - 3R^2 A + A^3 \right)$$

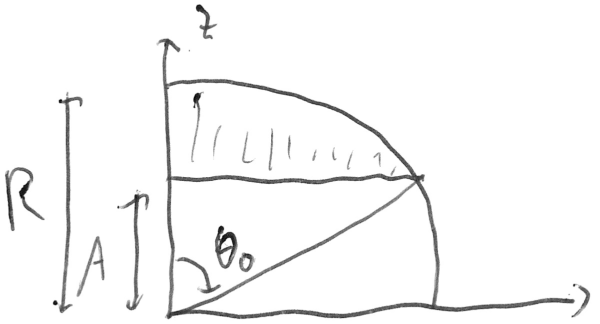
4/9

$\boxed{C}$ $x^2+y^2+z^2=\rho^2$

$(x^2+y^2+z^2)^{E/2}=(\rho^2)^{E/2}=\rho^E$

$x^2+y^2+z^2 \le R^2 \rightsquigarrow \rho^2 \le R^2 \rightsquigarrow \rho \le R$

$z \ge A \rightsquigarrow \rho \cos\theta \ge A \rightsquigarrow \rho \ge A/\cos\theta$



$\sqrt{x^2+y^2}=\rho \operatorname{sen}\theta$

$\theta \le \theta_0$

$\cos\theta_0 = AO/OP = A/R$

oppure

$A/\cos\theta \le \rho \le R$

$\rightsquigarrow A/\cos\theta \le R \rightsquigarrow A/R \le \cos\theta$

$\rightsquigarrow \theta_0 = \arccos(A/R) \ge \theta$

5/9

$$\iiint_{C} (x^2+y^2+z^2)^{E/2}\, dV$$

$$= \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\theta_0} \left(\int_{r=A/\cos\theta}^{R} r^E r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \left(\int_{\theta=0}^{\theta_0} \left(\int_{r=A/\cos\theta}^{R} r^{E+2} \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right)$$

$$= 2\pi \left(\int_{\theta=0}^{\theta_0} \left. \frac{r^{E+3}}{E+3} \operatorname{sen}\theta \right]_{r=A/\cos\theta}^{R} d\theta \right)$$

$$= \frac{2\pi}{E+3} \left(\int_{\theta=0}^{\theta_0} R^{E+3} \operatorname{sen}\theta - A^{E+3} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^{E+3}\theta} \, d\theta \right)$$

$$= \frac{2\pi}{E+3} \left[-R^{E+3} \cos\theta - \frac{A^{E+3}}{E+2} \cos^{-E-2}\theta \right]_{\theta=0}^{\theta_0}$$

$$= \frac{2\pi}{E+3}\left(-R^{E+3}\cos\theta_0 - \frac{A^{E+3}}{E+2}(\cos\theta_0)^{-E-2}\right.$$
$$\left. + R^{E+3}\cos 0 + \frac{A^{E+3}}{E+2}(\cos 0)^{-E-2}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{E+3}\left(-R^{E+3}\cdot\frac{A}{R} - \frac{A^{E+3}}{E+2}\left(\frac{R}{A}\right)^{E+2}\right.$$
$$\left. + R^{E+3} + \frac{A^{E+3}}{E+2}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{E+3}\left(-R^{E+2}A - \frac{1}{E+2}\cdot R^{E+2}\cdot A\right.$$
$$\left. + R^{E+3} + \frac{A^{E+3}}{E+2}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{E+3}\left(R^{E+3} - \left(\frac{E+3}{E+2}\right)R^{E+2}A + \frac{A^{E+3}}{E+2}\right)$$

7/9

$\boxed{1)}$

p	q	r	s	=
0	0	1	3	9
0	1	3	6	16
1	0	0	1	4
3	1	0	0	1

$$\xrightarrow{E1 \leftrightarrow E3} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{E4 \leftarrow E4 - 3E1} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -11 \end{matrix}$$

8/9

$E4 \leftarrow E4 - E2 \rightarrow$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & -27 \end{matrix}$$

$E2 \leftarrow E2 - 3E3$

$\longrightarrow$

$E4 \leftarrow E4 + 3E3$

$$\begin{array}{ccccc} p & q & r & s & = \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$p + s = 4$

$q - 3s = -11$

$r + 3s = 9$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s + 4 \\ 3s - 11 \\ -3s + 9 \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9/9

Controllo:

$r + 3s = (-3s + 9) + 3s = 9$ ✓

$q + 3r + 6s = (3s - 11) + 3(-3s + 9) + 6s = 16$ ✓

$p + s = (-s + 4) + s = 4$ ✓

$3p + q = 3(-s + 4) + (3s - 11) = 1$ ✓