

DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 21 giugno 2024

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici*. È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad dx dy = r dr d\theta$$

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad dx dy dz = r dr d\theta dz$$

A. Calcolare

$$\int \frac{t^2 + t + 1}{t^3 - t} dt$$

B. Sia \mathcal{T} il triangolo con vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$. Prima fare uno schizzo di \mathcal{T} . Poi usare le coordinate polari e calcolare:

$$\iint_{\mathcal{T}} (x^2 + y^2)^{1/2} dA$$

C. Siano $R > 0$ e E due parametri fissi. Sia \mathcal{S}_3 la sfera determinata dalla disuguaglianza:

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$$

Usare le coordinate *cilindriche* e calcolare

$$\iiint_{\mathcal{S}_3} z^E dV$$

D. Usare il metodo di Gauss-Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned} r + 3s &= 6 \\ q + 3r + 6s &= 10 \\ p + s &= 3 \\ 3p + q &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{7}$$

A

$$t^3 - t = t(t^2 - 1) = t(t-1)(t+1)$$

$$\frac{t^2 + t + 1}{t^3 - t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+1}$$

$$t^2 + t + 1 = A(t-1)(t+1) + Bt(t+1) + Ct(t-1)$$

$$t=0 \rightarrow 0+0+1 = A(-1)(+1) + 0+0$$

$$\rightarrow 1 = -A \rightarrow A = -1$$

$$t=+1 \rightarrow 1+1+1 = 0 + B(1)(2) + 0$$

$$\rightarrow 3 = 2B \rightarrow B = 3/2$$

$$t=-1 \rightarrow 1-1+1 = 0+0+C(-1)(-2)$$

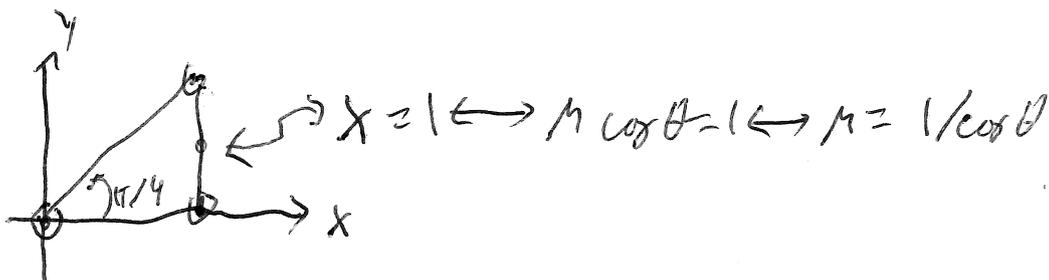
$$\rightarrow 1 = 2C \rightarrow C = 1/2$$

2/7

$$\int \frac{t^2 + t + 1}{t^3 - t} dt = \int -\frac{1}{t} + \frac{3}{2} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} dt$$

$$= -\log t + \frac{3}{2} \log(t-1) + \frac{1}{2} \log(t+1)$$

$$\boxed{B} \quad (x^2 + y^2)^{1/2} = (r^2)^{1/2} = r$$



$$\iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2)^{1/2} dA$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/4} \left(\int_{r=0}^{1/\cos\theta} r \cdot r dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta = \frac{1}{3} \int_{\theta=0}^{\pi/4} \sec^3\theta d\theta$$

3/7

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \tan \theta \sec \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sec \theta d\theta \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\tan \theta \sec \theta + \log(\tan \theta + \sec \theta) \right) \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{6} (1 \cdot \sqrt{2} - 0 \cdot 1 + \log(1 + \sqrt{2}) - \log(0 + 1))$$

$$= \frac{1}{6} (\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$$

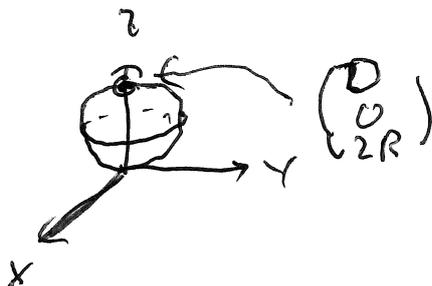
$$\boxed{C} \quad x^2 + y^2 + (z-R)^2 \leq R^2$$

$$\hookrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2zR + R^2 \leq R^2$$

$$\hookrightarrow x^2 + y^2 \leq 2zR - z^2 \Rightarrow R^2 \leq 2zR - z^2$$

$$0 \leq 2zR - z^2 \Rightarrow z^2 \leq 2zR \Rightarrow z \leq 2R$$

(per $z \geq 0$)



4/7

$$\iiint_{\mathcal{R}_3} z^E dV$$
$$= \int_{\theta=-\pi}^{+\pi} \left(\int_{z=0}^{2R} z^E \left(\int_{r=0}^{\sqrt{2zR-z^2}} r dr \right) dz \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_{z=0}^{2R} z^E \left(\frac{1}{2} (\sqrt{2zR-z^2})^2 \right) dz$$

$$= \pi \int_{z=0}^{2R} z^E (2zR - z^2) dz$$

$$= \pi \int_{z=0}^{2R} 2Rz^{E+1} - z^{E+2} dz$$

$$= \cancel{\pi \int_{z=0}^{2R} 2Rz^{E+1} - z^{E+2} dz} = \pi \left[\frac{2R}{E+2} z^{E+2} - \frac{1}{E+3} z^{E+3} \right]_{z=0}^{2R}$$

$$= \pi \left[\frac{2R}{E+2} (2R)^{E+2} - \frac{1}{E+3} (2R)^{E+3} \right]$$

$$\frac{5}{7}$$

$$= \pi (2R)^{E+3} \left[\frac{1}{E+2} - \frac{1}{E+3} \right]$$

$$= \frac{\pi (2R)^{E+3}}{(E+2)(E+3)}$$

D

p	q	n	s	=
0	0	1	3	6
0	1	3	6	10
1	0	0	1	3
3	1	0	0	1

$E \leftrightarrow K$

1	0	0	1	3
0	1	3	6	10
0	0	1	3	6
3	1	0	0	1

6/7

$E_4 \leftarrow E_4 - 3E_1$

①	0	0	1	3
0	①	3	6	10
0	0	1	3	6
0	1	0	-3	-8

$E_4 \leftarrow E_4 - E_2$

①	0	0	1	3
0	①	3	6	10
0	0	①	3	6
0	0	-3	-9	-18

$E_2 \leftarrow E_2 - 3E_3$
 $E_4 \leftarrow E_4 + 3E_3$

<u>p</u>	<u>q</u>	<u>m</u>	<u>s</u>	<u>=</u>
①	0	0	1	3
0	①	0	-3	-8
0	0	①	3	6
0	0	0	0	0

7/7

$$\begin{aligned} \textcircled{p} + s &= 3 \\ \textcircled{q} - 3s &= -8 \\ \textcircled{r} + 3s &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= -s + 3 \\ q &= 3s - 8 \\ r &= -3s + 6 \\ s &= s \end{aligned}$$

Controllo:

$$r + 3s = (-3s + 6) + 3s = 6$$

$$\begin{aligned} q + 3r + 6s &= (3s - 8) + 3(-3s + 6) + 6s \\ &= 0s + 10 = 10 \end{aligned}$$

$$p + s = (-s + 3) + s = 3$$

$$\begin{aligned} 3p + q &= 3(-s + 3) + (3s - 8) \\ &= 0s + 1 = 1 \end{aligned}$$