DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 27 febbraio 2024

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$$

A. Per parametri costanti a e b calcolare:

$$\int \frac{t^3}{(t-a)(t-b)}\,dt$$

B. In spazio 5 dimensionale con coordinate r, s, t, u, e v, calcolare la media di u sul volume 5-dimensionale dato dalle disuguaglianze:

$$0 \le r \le s \le t \le u \le v \le 1$$

C. Siano $R > 0$ e E due parametri fissi. Sia $\mathcal{S}_3$ la sfera determinata dalla disuguaglianza:

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$$

Usare le coordinate sferiche e calcolare

$$\iiint_{\mathcal{S}_3} z^E \, dV$$

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{array}{llll} p & +q & +r & = A \\ p & +2q & +3r & = B \\ p & +3q & +6r & = C \end{array}$$

per ***(attenzione!)*** p, A, e r in termini di q, B, e C. (Indicazione: il solo denominatore che deve venir fuori è 3.)

1/10

$\boxed{A}$

$$\int \frac{t^3}{(t-a)(t-b)}\,dt$$

grado = 3

grado = 2

$$(t-a)(t-b) = t^2 + (-a-b)t + ab$$

$$
\begin{array}{l|l}
t^3 & t^2+(-a-b)t+ab \\
\hline
-\left[t^3+(-a-b)t^2+abt\right] & t+(a+b) \\
\hline
// \quad (a+b)t^2 - abt & \\
\quad -\left[(a+b)t^2-(a^2+2ab+b^2)t + a^2b+ab^2\right] & \\
\hline
// \quad (a^2+ab+b^2)t + (-a^2b-ab^2) &
\end{array}
$$

$$t^3 = (t+(a+b))(t^2+(-a-b)t+ab) + (a^2+ab+b^2)t + (-a^2b-ab^2)$$

2/10

$$\frac{t^3}{t^2+(-a-b)t+ab} = t+(a+b) + \frac{(a^2+ab+b^2)t+(-a^2b-ab^2)}{t^2+(-a-b)t+ab}$$

$$\frac{(a^2+ab+b^2)t+(-a^2b-ab^2)}{(t-a)(t-b)} = \frac{C}{t-a} + \frac{D}{t-b}$$

$$(a^2+ab+b^2)t+(-a^2b-ab^2)$$
$$= C(t-b)+D(t-a)$$

$$t=a \rightsquigarrow (a^2+ab+b^2)a+(-a^2b-ab^2)$$
$$= C(a-b)+0$$
$$\rightsquigarrow a^3 = C(a-b) \rightsquigarrow C = \frac{a^3}{a-b}$$

3/10

$t = b \rightsquigarrow (a^2+ab+b^2)b + (-a^2b-ab^2)$

$= 0 + D(b-a)$

$\rightsquigarrow b^3 = D(b-a) \rightsquigarrow D = \frac{b^3}{b-a}$

$$\int \frac{t^3}{(t-a)(t-b)}\, dt$$

$$= \int t + (a+b) + \frac{a^3}{a-b}\frac{1}{t-a} + \frac{b^3}{b-a}\frac{1}{t-b}\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + (a+b)t + \frac{a^3}{a-b}\log(t-a) + \frac{b^3}{b-a}\log(t-b)$$

$\boxed{B}$ $0 \le r \le s \le t \le u \le v \le 1$

$\hookrightarrow$ $0 \le r \le s$ & $0 \le s \le t \le u \le v \le 1$

$\hookrightarrow$ $0 \le s \le t$ & $0 \le t \le u \le v \le 1$

4/10

$$0 \le t \le u \quad e \quad 0 \le u \le v \le 1$$

$$0 \le u \le v \quad e \quad 0 \le v \le 1$$

$$\int_{v=0}^{1}\left(\int_{u=0}^{v}\left(\int_{t=0}^{u}\left(\int_{s=0}^{t}\left(\int_{r=0}^{s} 1 \, dr\right) ds\right) dt\right) du\right) dv$$

$$= \int_{v=0}^{1}\left(\int_{u=0}^{v}\left(\int_{t=0}^{u}\left(\int_{s=0}^{t} s \, ds\right) dt\right) du\right) dv$$

$$= \int_{v=0}^{1}\left(\int_{u=0}^{v}\left(\int_{t=0}^{u} \frac{t^2}{2} \, dt\right) du\right) dv$$

$$= \int_{v=0}^{1}\left(\int_{u=0}^{v} \frac{u^3}{3\cdot 2} \, du\right) dv = \int_{v=0}^{1} \frac{v^4}{4\cdot 3\cdot 2} \, dv$$

$$= \frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$$

5/10

$$\int_{v=0}^{1}\left(\int_{u=0}^{v}\left(\int_{t=0}^{u}\left(\int_{s=0}^{t}\left(\int_{r=0}^{s} u \, dr\right)ds\right)dt\right)du\right)dv$$

$$= \int_{v=0}^{1}\left(\int_{u=0}^{v}\left(\int_{t=0}^{u}\left(\int_{s=0}^{t} u s \, ds\right)dt\right)du\right)dv$$

$$= \int_{v=0}^{1}\left(\int_{u=0}^{v}\left(\int_{t=0}^{u} \frac{ut^2}{2} \, dt\right)du\right)dv$$

$$= \int_{v=0}^{1}\left(\int_{u=0}^{v} \frac{u^4}{3\cdot 2} \, du\right)dv = \int_{v=0}^{1} \frac{v^5}{5\cdot 3\cdot 2} \, dv$$

$$= \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}$$

$$\bar{u} = \frac{\int\int\int\int\int u \, dV_5}{\int\int\int\int\int 1 \, dV_5} = \frac{1/6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}{1/5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$$

$$= \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

6/10

$\boxed{C}$ $x^2+y^2+(z-R)^2 \leq R^2$

$\hookrightarrow x^2+y^2+z^2-2Rz+\cancel{R^2} \leq \cancel{R^2}$

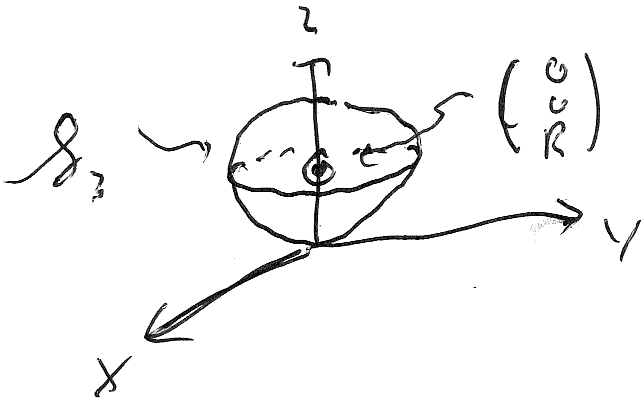
$\hookrightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 2Rz$

$\hookrightarrow r^2 \leq 2Rr\cos\theta$

$\hookrightarrow r \leq 2R\cos\theta$

Sera $0 \leq r \leq 2R\cos\theta$ e $0 \leq \cos\theta$

$\hookrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



7/10

$$\iiint_{\mathcal{S}_3} z^E \, dV$$

$$= \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{2R\cos\theta} (r\cos\theta)^E \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} (\cos\theta)^E \operatorname{sen}\theta \left(\int_{r=0}^{2R\cos\theta} r^{E+2} \, dr \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} (\cos\theta)^E \operatorname{sen}\theta \frac{(2R\cos\theta)^{E+3}}{E+3} \, d\theta$$

$$= \frac{2^{E+4}\pi R^{E+3}}{E+3} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (\cos\theta)^{2E+3} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2^{E+4}\pi R^{E+3}}{E+3} \cdot \left[\frac{-(\cos\theta)^{2E+4}}{2E+4} \right]_{\theta=0}^{\pi/2}$$

8/10

$$= \frac{2^{E+4}\pi R^{E+3}}{(E+3)\cdot 2\cdot(E+2)}\left[-0+1\right]$$

$$= \frac{2^{E+3}\pi R^{E+3}}{(E+2)(E+3)}$$

$\boxed{D}$

$$\begin{aligned} p - A + n &= -q \\ p \quad + 3n &= -2q + B \\ p \quad + 6n &= -3q \quad + C \end{aligned}$$

p	A	n	= q	B	C
1	-1	1	-1	0	0
1	0	3	-2	1	0
1	0	6	-3	0	1

$E2 \leftarrow E2 - E1$

$E3 \leftarrow E3 - E1$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

9/10

$$E1 \leftarrow E1+E2 \quad \longrightarrow \quad E3 \leftarrow E3-E2$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{E3 \leftarrow E3/3}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{E1 \leftarrow E1-3E3} \quad E2 \leftarrow E2-2E3$$

$$\begin{array}{cccccc} p & A & \lambda & = q & B & C \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 5/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}$$

$$p = -q + 2B - C$$

$$A = -\frac{1}{3}q + \frac{5}{3}B - \frac{2}{3}C$$

$$\lambda = -\frac{1}{3}q - \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

10/10

Controllo:

$$p + q + r = (-q + 2B - C) + q + \left(-\frac{1}{3}q - \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C\right)$$

$$= -\frac{1}{3}q + \frac{5}{3}B - \frac{2}{3}C = A \quad \text{(v)}$$

$$p + 2q + 3r = (-q + 2B - C) + 2q + (-q - B + C)$$

$$= B \quad \text{(v)}$$

$$p + 3q + 6r = (-q + 2B - C) + 3q + (-2q - 2B + 2C)$$

$$= C \quad \text{(v)}$$