DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 17 gennaio 2025

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

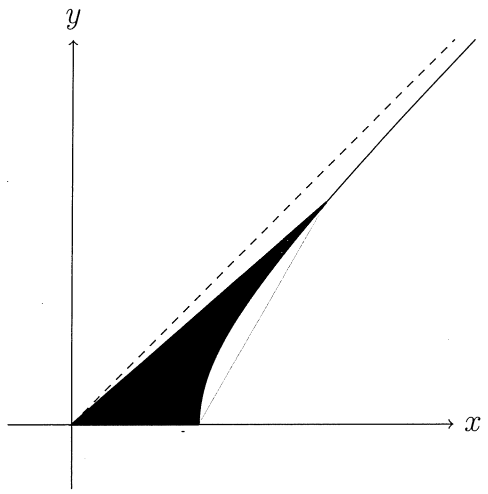
$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

A. Calcolare

$$\int \frac{3u^2+2u+1}{u^4-1}\,du$$

B. Si usi le coordinate polari, si fissi un angolo θ_0, $0 < \theta_0 < \pi/4$ e si consideri la zona $\mathcal{Z}$ definita dalle disuguaglianze:

$$x^2 \leq y^2 + 1 \qquad\qquad 0 \leq \theta \leq \theta_0$$



Dove si trova θ_0 sul disegno? Cos'è il significato della linea tratteggiata? Cosa capita quando θ_0 tende a $\pi/4$?
Calcolare l'area di $\mathcal{Z}$. Nel calcolo sarà utile l'identità $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$.

C. Sia $R > 0$ una costante positiva e sia $\mathcal{F}$ l'ottava parte di sfera definita da

$$0 \leq x \leq y \qquad\qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

Fare un disegno di $\mathcal{F}$. Poi usare le coordinate sferiche e calcolare

$$\iiint_{\mathcal{F}} xy\, dV$$

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ a + b + d &= 6 \\ a + c + d &= 9 \\ b + c + d &= 12 \end{aligned}$$

(Indicazione: Se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, non saranno necessari denominatori.)

1/10

$\boxed{A}$ $u^4 - 1 = (u^2-1)(u^2+1)$

$= (u-1)(u+1)(u^2+1)$

$$\frac{3u^2+2u+1}{u^4-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{u^2+1} + \frac{2Du}{u^2+1}$$

$$3u^2+2u+1 = A(u+1)(u^2+1) + B(u-1)(u^2+1) + C(u-1)(u+1) + 2Du(u-1)(u+1)$$

$u=-1 \to 3(-1)^2+2(-1)+1 = 0+B(-2)(2)+0+0$

$\to 2=-4B \to B=-1/2$

2/10

$u = 3(1^2) + 2(1) + 1 = A(2)(2) + 0 + 0 + 0$

$\rightarrow 6 = 4A \rightarrow A = 3/2$

$$
\begin{aligned}
3u^2 + 2u + 1 = {} & \tfrac{3}{2}(u^3 + u^2 + u + 1) \\
& - \tfrac{1}{2}(u^3 - u^2 + u - 1) \\
& + C(\quad u^2 \quad - 1) \\
& + 2D(u^3 \quad - u \quad)
\end{aligned}
$$

$0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2D \rightarrow D = -1/2$

$3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + C \rightarrow C = 1$

$2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2D \rightarrow D = -1/2$

$1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - C \rightarrow C = 1$

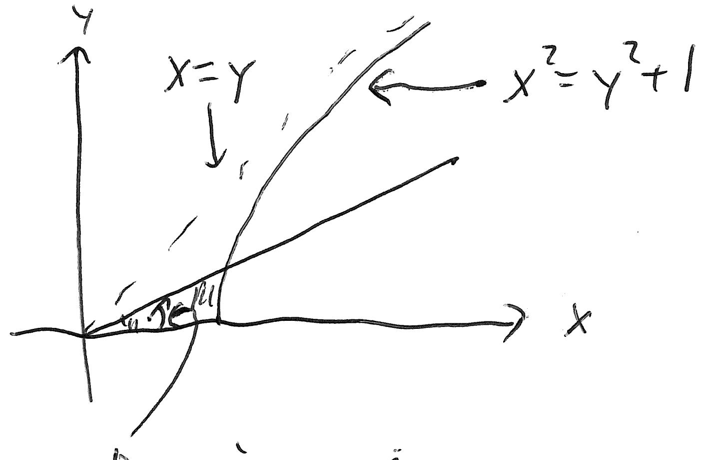
coerente
con i valori già trovati

3/10

$$\int \frac{3}{2}\frac{1}{u-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{u+1} + \frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{2}\frac{2u}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{3}{2}\log(u-1) - \frac{1}{2}\log(u+1) + \arctan(u) - \frac{1}{2}\log(u^2+1)$$

B)



Per $x^2 = y^2+1$ è $x, y >> 1$, vale $x \approx y$. La linea tratteggiata, che corrisponde ad $x = y$, è l'asintoto alla curva (l'iperbole) data da $x^2 = y^2 + 1$.

Per $\theta_0 < \pi/4$, la zona Z è finita. Per $\theta_0 = \pi/4$ la linea solida coincide con la linea tratteggiata e la zona Z ha un pezzo che estende fino all'infinito. Perciò, in questo caso è possibile che la sua area sia infinita.

$$x^2 \le y^2 + 1 \rightsquigarrow (r\cos\theta)^2 \le (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + 1$$

$$\rightsquigarrow r^2(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) \le 1$$

$$\rightsquigarrow r^2(\cos 2\theta) \le 1$$

$$\rightsquigarrow r^2 \le 1/\cos 2\theta$$

$$\rightsquigarrow r \le (\cos 2\theta)^{-1/2}$$

5/10

$$\int_{\theta=0}^{\theta_0} \left(\int_{r=0}^{(\cos 2\theta)^{-1/2}} 1 \cdot r \, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{1}{2}\left((\cos 2\theta)^{-1/2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\theta_0} \sec(2\theta)\, d\theta$$

$2\theta = v$

$2\,d\theta = 2v$

$\theta = 0 \leftrightarrow v = 0$

$\theta = \theta_0 \leftrightarrow v = 2\theta_0$

$$= \frac{1}{4}\int_{v=0}^{2\theta_0} \sec(v)\, dv$$

$$= \frac{1}{4} \log(\operatorname{tg} v + \sec v)\Big]_{v=0}^{2\theta_0}$$

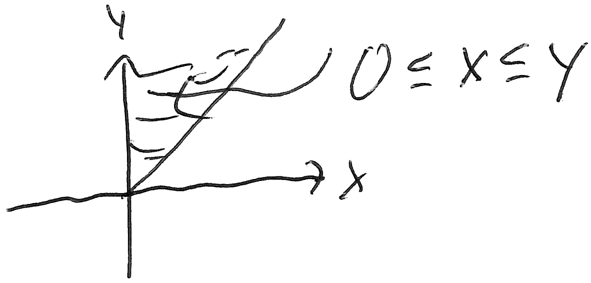
$$= \frac{1}{4}\log(\operatorname{tg}(2\theta_0) + \sec(2\theta_0)) - \frac{1}{4}\log(0+1)$$

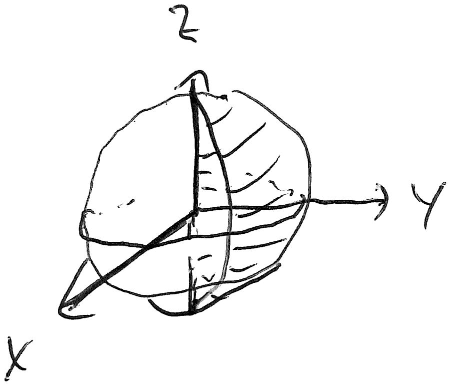
$$= \frac{1}{4}\log(\operatorname{tg}(2\theta_0) + \sec(2\theta_0))$$

6/10

Quando $\theta_0 \to \pi/4$ e $2\theta_0 \to \pi/2$, l'area calcolata tende all'infinito.

$\boxed{C}$





$$x^2+y^2+z^2 \le R^2 \to r^2 \le R^2 \to r \le R$$

$$0 \le x \le y \to 0 \le r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \le r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

$$\to 0 \le \cos\varphi \le \operatorname{sen}\varphi$$

$$\to 0 \le \varphi \le \pi/2 \quad e \quad 1 \le \operatorname{tg}\varphi$$

$$\to \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Sempre: $0 \le \theta \le \pi$, $r \ge 0$

7/10

$$\iiint_{\mathcal{E}} xy \, dV$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^{R} (r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi)(r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi) \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen}\varphi)(\cos\varphi) \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta \left(\int_{r=0}^{R} r^4 \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$\left[\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta \, d\theta = -\frac{1}{3} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta \right]_{\theta=0}^{\pi} + \frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$= 0 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

$$\int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \left. \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\varphi \right]_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

8/10

$$\iiint_{\mathcal{F}} xy \, dV$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta \cdot \frac{R^5}{5} d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R^5}{5} \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{R^5}{15}$$

$\boxed{D}$.

a	b	c	d	=
1	1	1	0	3
1	1	0	1	6
1	0	1	1	9
0	1	1	1	12

9/10

$$\xrightarrow[E3 \leftarrow E3 - E1]{E2 \leftarrow E2 - E1} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{E2 \leftrightarrow E3} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \end{matrix} \xrightarrow{E2 \leftarrow -E2} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[E4 \leftarrow E4 - E2]{E1 \leftarrow E1 - E2} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 18 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{E3 \leftarrow -E3} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 18 \end{matrix} \xrightarrow[E4 \leftarrow E4 - E3]{E1 \leftarrow E1 - E3} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 21 \end{matrix}$$

10/10

$$\xrightarrow{E4 \leftarrow E4/3} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{E1 \leftarrow E1-2E4} \quad \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & = \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

$E2 \leftarrow E2+E4$

$E3 \leftarrow E3+E4$

$a = -2$
$b = 1$
$c = 4$
$d = 7$

Controllo: $a+b+c = -2+1+4 = 3$

$a+b+d = -2+1+7 = 6$ V

$a+c+d = -2+4+7 = 9$

$b+c+d = 1+4+7 = 12$