DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 25 febbraio 2025

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici*. È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

A. Calcolare

$$\int \frac{v^3}{(v^2+2v+2)(v^2+1)}\,dv$$

B. Siano E ed F due esponenti fissi e siano A e B due lunghezze fisse, ambedue positive. Calcolare la media di $x^E y^F$ sul triangolo $\mathcal{T}$ con vertici $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{0}$ e $\binom{1}{1}$. Da questo esito, e *senza fare nuovi integrali*, calcolare la media della stessa funzione sul triangolo $\mathcal{T}'$ con vertici: $\binom{0}{0}$, $\binom{A}{0}$ e $\binom{A}{B}$.

C. Siano $R > 0$ un parametro fisso. Sia $\mathcal{F}$ la forma tridimensionale determinata dai vincoli:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \qquad\qquad x \geq |y|$$

Prima fare uno schizzo della forma $\mathcal{F}$. Poi usare le coordinate *cilindriche* e calcolare la media di x su $\mathcal{F}$.

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema:

$$\begin{array}{rrrrl}
v & +2x & +3y & +4z & = 0 \\
5v & +6x & +7y & +8z & = 1 \\
9v & +10x & +11y & +12z & = 2 \\
13v & +14x & +15y & +16z & = 3 \\
17v & +18x & +19y & +20z & = 4 \\
21v & +22x & +23y & +24z & = 5
\end{array}$$

$\boxed{A}$ Per v^2+2v+2

$$\Delta = 2^2-4\cdot 2 = -4$$

Per v^2+1

$$\Delta = 0^2-4\cdot 1 = -4,$$

ambedue < 0.

$$\frac{v^3}{(v^2+2v+2)(v^2+1)} = \frac{A}{v^2+2v+2} + \frac{B(2v+2)}{v^2+2v+2}$$

$$+ \frac{C}{v^2+1} + \frac{D(2v)}{v^2+1}$$

$$v^3 = A(v^2+1) + B(2v+2)(v^2+1)$$
$$+ C(v^2+2v+2) + D(2v)(v^2+2v+2)$$
$$= (2B + 2D)v^3$$
$$+ (A+2B+C+4D)v^2$$
$$+ (2B+2C+4D)v$$
$$+ (A+2B+2C)$$

2/13

$$2B+2D=1 \rightsquigarrow D=\tfrac{1}{2}-B$$

$$\begin{cases} A+2B+C+4D=0 \\ 2B+2C+4D=0 \\ A+2B+2C=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+2B+C+4(\tfrac{1}{2}-B)=0 \\ 2B+2C+4(\tfrac{1}{2}-B)=0 \\ A+2B+2C=0 \end{cases} \to \begin{cases} A-2B+C=-2 \\ -2B+2C=-2 \\ A+2B+2C=0 \end{cases}$$

$$-2B+2C=-2 \rightsquigarrow C=B-1$$

$$\begin{cases} A-2B+(B-1)=-2 \\ A+2B+2(B-1)=0 \end{cases}$$

$$A-B=-1 \rightsquigarrow B=A+1$$

$$\{A+4B=2\} \rightsquigarrow \{A+4(A+1)=2\}$$

$$\to 5A=-2 \to A=-2/5$$

$A=-2/5$ $\quad C=B-1=-2/5$

$B=A+1=3/5$ $\quad D=\tfrac{1}{2}-B=-1/10$

$$\int \frac{1}{v^2+1}\,dv = \operatorname{arctg} v$$

$$\int \frac{1}{v^2+2v+2}\,dv = \int \frac{1}{(v+1)^2+1}\,dv = \operatorname{arctg}(v+1)$$

o con la formula:

$$v^2+2v+2 = Av^2+Bv+C$$

$$-\Delta = 4AC-B^2 = 4, \quad \sqrt{-\Delta} = 2$$

$$\int \frac{1}{v^2+2v+2}\,dv = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2v+2}{\sqrt{-\Delta}}\right)$$

$$= \operatorname{arctg}(v+1)$$

$$\int \frac{v^3}{(v^2+2v+2)(v^2+1)}\,dv$$

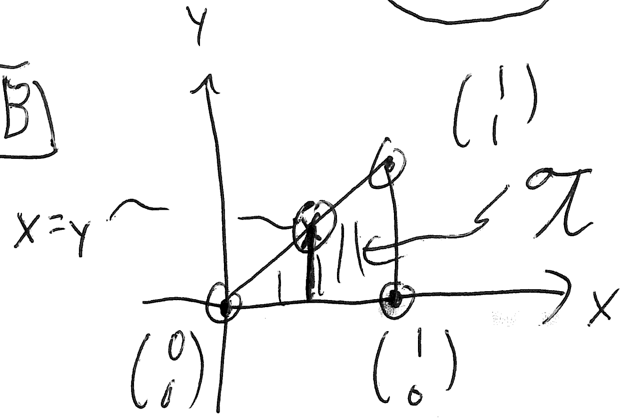
$$= \int -\frac{2}{5}\frac{1}{v^2+2v+2} + \frac{3}{5}\frac{2v+2}{v^2+2v+1}$$

$$-\frac{3}{5}\frac{1}{v^2+1} - \frac{1}{10}\frac{2v}{v^2+1}\,dv$$

$$= -\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(v+1) + \frac{3}{5}\log(v^2+2v+1)$$
$$-\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(v) - \frac{1}{10}\log(v^2+1)$$

4/13

$\boxed{B}$



$$\iint_{\mathcal{T}} 1 \, dA = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{x} 1 \, dy \right) dx$$

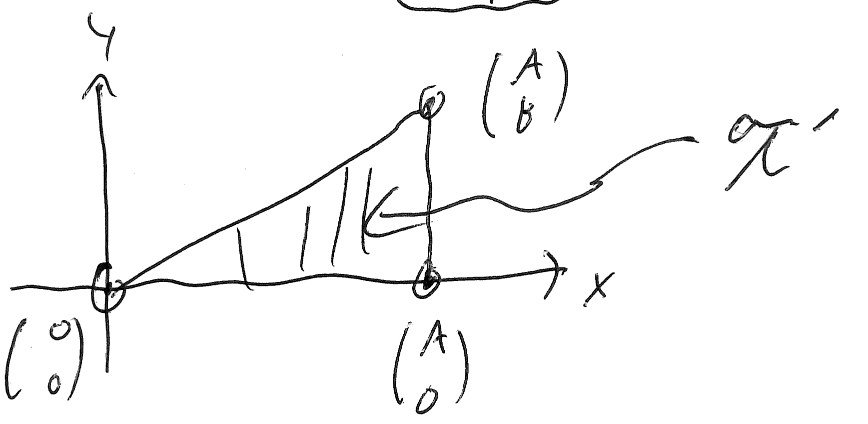
$$= \int_{x=0}^{1} x \, dx = \frac{1}{2}$$

(= area($\mathcal{T}$), giusto!)

$$\iint_{\mathcal{T}} x^E y^F \, dA = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{x} x^E y^F \, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} x^E \frac{x^{F+1}}{F+1} \, dx = \frac{1}{(F+1)(E+F+2)}$$

$$\overline{x^E y^F} = \frac{1/((F+1)(E+F+2))}{1/2} = \frac{2}{(F+1)(E+F+2)}$$



Si ottiene T' da T allungando

- per un fattore di A lungo l'asse x
- per un fattore di B lungo l'asse y

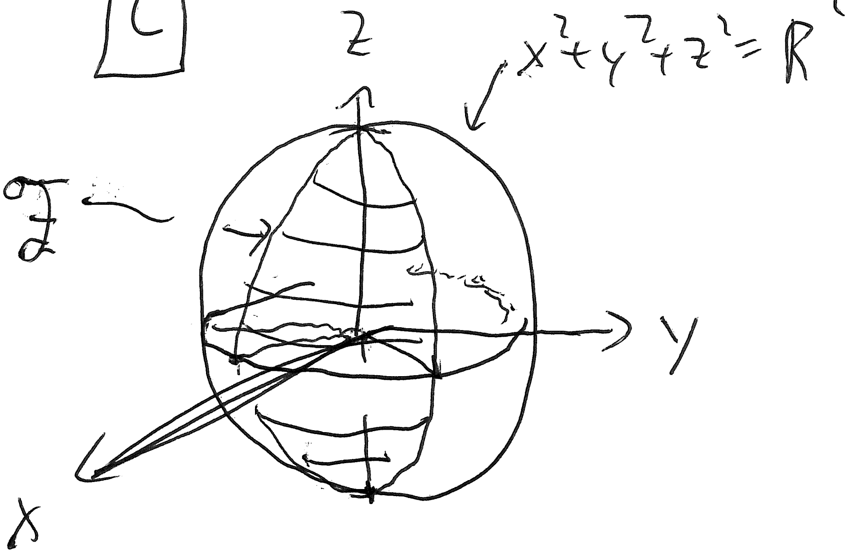
I valori di

- x^E si moltiplicano per A^E
- y^F si moltiplicano per B^F
- $x^E y^F$ si moltiplicano per $A^E B^F$
- la media di $x^E y^F$ altrettanto si moltiplica per $A^E B^F$

$$\overline{x^E y^F}_{\text{, su } T'} = \boxed{\frac{2A^E B^F}{(F+1)(E+F+2)}}$$

6/13

$\boxed{C}$



$x \geq |y|$ → $x \geq y$ se $y \geq 0$

→ $x \geq -y$ se $y \leq 0$

$$x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \rightarrow r^2+z^2 \leq R^2$$

$$\rightarrow z^2 \leq R^2 - r^2$$

$$\rightarrow |z| \leq \sqrt{R^2-r^2}$$

$$\rightarrow -\sqrt{R^2-r^2} \leq z \leq +\sqrt{R^2-r^2}$$

7/13

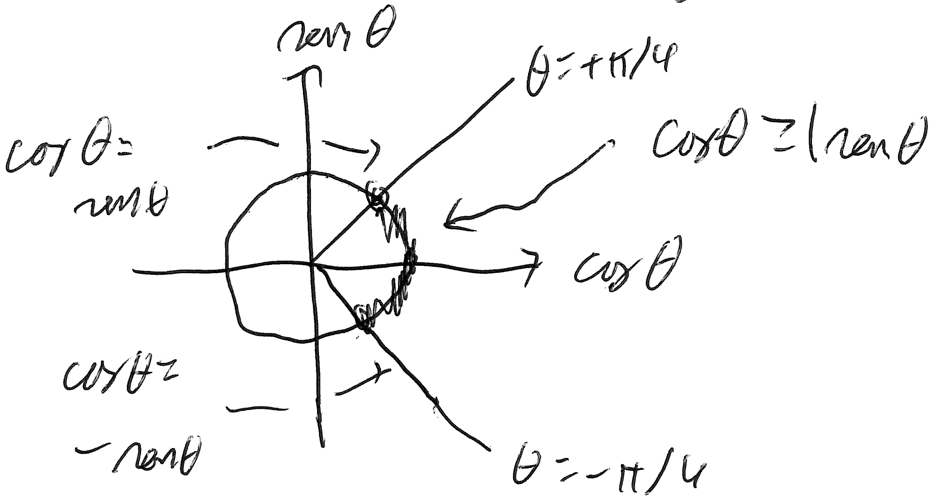
$r \geq 0$ (sempre) e $r^2 \leq R^2$

$\rightsquigarrow 0 \leq r \leq R$

$x \geq |y| \rightsquigarrow r\cos\theta \geq |r \operatorname{sen}\theta|$

$\rightarrow \cos\theta \geq |\operatorname{sen}\theta|$

(poiché $r \geq 0$ sempre)



$-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$

$$\iiint_{\mathcal{F}} 1 \, dV = \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_{r=0}^{R} \left(\int_{z=-\sqrt{R^2-r^2}}^{+\sqrt{R^2-r^2}} 1 \cdot r \, dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_{r=0}^{R} r\sqrt{R^2-r^2} \, dr$$

8/13

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(R^2 - r^2\right)^{3/2} \Big]_{r=0}^{R}$$

$$= \frac{-\pi}{3} \left(0 - R^3\right) = \frac{\pi R^3}{3}$$

$(= \frac{1}{4}$ vol(sfera), giusto)

$$\iiint_{\mathcal{F}} x \, dV = \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_{r=0}^{R} \left(\int_{z=-\sqrt{R^2-r^2}}^{+\sqrt{R^2-r^2}} (r\cos\theta) \cdot r \, dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= 2 \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta \left(\int_{r=0}^{R} r^2 \sqrt{R^2-r^2} \, dr \right) d\theta$$

$$\left[\int_{r=0}^{R} r^2 \sqrt{R^2-r^2} \, dr \right.$$

$r = R$ ~~[illegible]~~ $\operatorname{sen} t$
$dr = R \cos t \, dt$
$R^2 - r^2 = R^2 - R^2 \cos^2 t$
$= R^2(1 - \operatorname{sen}^2 t)$
$\sqrt{R^2-r^2} = R \cos t$

$r = R \rightarrow \operatorname{sen} t = 1$
$\rightarrow t = \pi/2$
$r = 0 \rightarrow \operatorname{sen} t = 0$
$\rightarrow t = 0$

$$= \int_{t=0}^{\pi/2} (R \operatorname{sen} t)^2 (R \cos t) R \cos t \, dt$$

$$= R^4 \int_{t=0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t \, dt$$

$$= R^4 \int_{t=0}^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^2 t \, dt$$

$$= R^4 \left(\int_{t=0}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt - \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^4 t \, dt \right)$$

$$= R^4 \left(\int_{t=0}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt - \frac{3}{4} \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \right)$$

$$= \frac{R^4}{4} \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^0 t \, dt$$

$$= \frac{R^4}{8} \int_{t=0}^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{R^4}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$\iiint_E x \, dV = 2 \cdot \frac{\pi R^4}{16} \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta \, dt$$

10/13

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{16} R^4 \cdot 2 \int_{\theta=0}^{\pi/4} \cos\theta \, d\theta$$

(poiché $\cos\theta$ è pari)

$$= \frac{\pi R^4}{4} \operatorname{sen}\theta \Big]_{\theta=0}^{\pi/4} = \frac{\pi R^4}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi R^4 \sqrt{2}}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{\pi R^4 \sqrt{2}/8}{\pi R^3/3} = \frac{3\sqrt{2}}{8} R$$

$= (0{,}53033\ldots) R$ (ragionevole)

D

V	X	Y	Z	=
1	2	3	4	0
5	6	7	8	1
9	10	11	12	2
13	14	15	16	3
17	18	19	20	4
21	22	23	24	5

11/13

$E2 \leftarrow E2 - 5E1$
$E3 \leftarrow E3 - 9E1$
$E4 \leftarrow E4 - 13E1$
$E5 \leftarrow E5 - 17E1$
$E6 \leftarrow E6 - 21E1$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & 1 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & 2 \\ 0 & -12 & -24 & -36 & 3 \\ 0 & -16 & -32 & -48 & 4 \\ 0 & -20 & -40 & -60 & 5 \end{matrix}$$

$E2 \leftarrow -\frac{1}{4} E2$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1/4 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & 2 \\ 0 & -12 & -24 & -36 & 3 \\ 0 & -16 & -32 & -48 & 4 \\ 0 & -20 & -40 & -60 & 5 \end{matrix}$$

$E1 \leftarrow E1 - 2E2$
$E3 \leftarrow E3 + 8E2$
$E4 \leftarrow E4 + 12E2$
$E5 \leftarrow E5 + 16E2$
$E6 \leftarrow E6 + 20E2$

v	x	y	z	=
1	0	-1	-2	1/2
0	1	2	3	-1/4
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

12/13

$v - y - 2z = 1/2$

$x + 2y + 3z = -1/4$

nonché $0=0$, sempre vero

$$\begin{pmatrix} v \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z + 1/2 \\ -2y - 3z - 1/4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Controllo: $v + 2x + 3y + 4z$

$$\begin{aligned} &= (y + 2z + \tfrac{1}{2}) && = 0y + 0z + 0 \\ &+ 2(-2y - 3z - \tfrac{1}{4}) && = 0 \checkmark \\ &+ 3(y) \\ &+ 4(z) \end{aligned}$$

$$5v+6x+7y+8z$$

$$\begin{aligned}
= \; & 5(y+2z+\tfrac{1}{2}) & = 0y+0z+\tfrac{2}{2} \\
& +6(-2y-3z-\tfrac{1}{4}) & = 1 \checkmark \\
& +7(y \qquad\qquad) & \\
& +8(\qquad z \qquad) &
\end{aligned}$$

$$9v+10x+11y+12z$$

$$\begin{aligned}
= \; & 9(y+2z+\tfrac{1}{2}) & = 0y+0z+\tfrac{4}{2} \\
& +10(-2y-3z-\tfrac{1}{4}) & = 2 \checkmark \\
& +11(y \qquad\qquad) & \\
& +12(\qquad z \qquad) &
\end{aligned}$$

eccetera