Matematica 2, Steger — Le antiderivate delle funzioni razionali II

Un esercizio da svolgere — calcolare:

$$\int \frac{(t-1)^5}{(t+3)(t+1)t(t-2)}\, dt$$

Primo passo: ridurre al caso che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore. In quanto grado$(t-1)^5 = 5 \geq 4 =$ grado$(t+3)(t+1)t(t-2)$ occorre una divisione di polinomi. Prima si espandono il numeratore e il denominatore:

$$\frac{(t-1)^5}{(t+3)(t+1)t(t-2)} = \frac{t^5 - 5t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 5t - 1}{t^4 + 2t^3 - 5t^2 - 6t}$$

Poi la divisione stessa:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
t^5 & -5t^4 & +10t^3 & -10t^2 & +5t & -1 & t^4 + 2t^3 - 5t^2 - 6t \\ \cline{7-7}
-t^5 & -2t^4 & +5t^3 & +6t^2 & & & t - 7 \\ \cline{1-4}
 & -7t^4 & +15t^3 & -4t^2 & +5t & & \\
 & 7t^4 & +14t^3 & -35t^2 & -42t & & \\ \cline{2-5}
 & & 29t^3 & -39t^2 & -37t & -1 &
\end{array}$$

che significa:

$$t^5 - 5t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 5t - 1 = (t-7)(t^4 + 2t^3 - 5t^2 - 6t) + (29t^3 - 39t^2 - 37t - 1)$$

che dopo divisione da $t^4 + 2t^3 - 5t^2 - 6t$ diventa:

$$\frac{t^5 - 5t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 5t - 1}{t^4 + 2t^3 - 5t^2 - 6t} = t - 7 + \frac{29t^3 - 39t^2 - 37t - 1}{t^4 + 2t^3 - 5t^2 - 6t}$$

Ormai la manovra ha raggiunto il suo obiettivo in quanto

$$\text{grado}(29t^3 - 39t^2 - 37t - 1) = 3 < 4 = \text{grado}(t^4 + 2t^3 - 5t^2 - 6t)$$

Secondo passo: fattorizzare il denominatore. Questo era già fatto nell'enunciata dell'esercizio: $t^4 + 2t^3 - 5t^2 - 6t = (t+3)(t+1)t(t-2)$. In generale ci servono fattori che sono di primo grado, come in questo caso, o di secondo grado con radici complesse: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Terzo passo: esprimere la (modificata) funzione razionale come somma di "atomi" con coefficienti da determinare.

$$\frac{29t^3 - 39t^2 - 37t - 1}{(t+3)(t+1)t(t-2)} = A\frac{1}{t+3} + B\frac{1}{t+1} + C\frac{1}{t} + D\frac{1}{t-2} \tag{1}$$

Quarto passo: trovare i valori di quei coefficienti. Moltiplicando (1) per il denominatore, $(t+3)(t+1)t(t-2)$, si ottiene il desiderato uguaglianza fra polinomi:

$$\begin{aligned}
&29t^3 - 39t^2 - 37t - 1 \\
&= A(t+1)t(t-2) + B(t+3)t(t-2) + C(t+3)(t+1)(t-2) + D(t+3)(t+1)t \\
&= A(t^3 - t^2 - 2t) + B(t^3 + t^2 - 6t) + C(t^3 + 2t^2 - 5t - 6) + D(t^3 + 4t^2 + 3t) \\
&= (A+B+C+D)t^3 + (-A+B+2C+4D)t^2 + (-2A-6B-5C+3D)t + (-6C)
\end{aligned}$$

equivalente al sistema di equazioni di primo grado:

$$\begin{aligned}
A + B + C + D &= 29 \\
-A + B + 2C + 4D &= -39 \\
-2A - 6B - 5C + 3D &= -37 \\
-6C &= -1
\end{aligned}$$

Dall'ultima equazione si risolve subito per C: $C = 1/6$. Il resto del sistema diventa:

$$\begin{aligned}
A + B + (1/6) + D &= 29 \\
-A + B + 2(1/6) + 4D &= -39 \\
-2A - 6B - 5(1/6)C + 3D &= -37
\end{aligned}
\quad \text{cioè} \quad
\begin{aligned}
A + B + D &= 173/6 \\
-A + B + 4D &= -118/3 \\
-2A - 6B + 3D &= -217/6
\end{aligned}$$

che affrontiamo con l'algoritmo di Gauss–Jordan:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 173/6 \\ -1 & 1 & 4 & -118/3 \\ -2 & -6 & 3 & -217/6 \end{matrix}
\xrightarrow[\substack{E2 \leftarrow E2+E1 \\ E3 \leftarrow E3+2E1}]{}
\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 173/6 \\ 0 & 2 & 5 & -21/2 \\ 0 & -4 & 5 & 43/2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{E2 \leftarrow \frac{1}{2}E2}
\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 173/6 \\ 0 & 1 & 5/2 & -21/4 \\ 0 & -4 & 5 & 43/2 \end{matrix}
\xrightarrow[E3 \leftarrow E3+4E2]{E1 \leftarrow E1-E2}
\begin{matrix} 1 & 0 & -3/2 & 409/12 \\ 0 & 1 & 5/2 & -21/4 \\ 0 & 0 & 15 & 1/2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{E3 \leftarrow \frac{1}{15}E3}
\begin{matrix} 1 & 0 & -3/2 & 409/12 \\ 0 & 1 & 5/2 & -21/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/30 \end{matrix}
\xrightarrow{\substack{E1 \leftarrow E1+(3/2)E3 \\ E2 \leftarrow E2-(5/2)E2}}
\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 512/15 \\ 0 & 1 & 0 & -16/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/30 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} A &= 512/15 \\ B &= -16/3 \\ D &= 1/30 \end{aligned}$$

Nota bene: c'è un modo più veloce per ottenere i valori di A, B, C e D. Si comincia con la desiderata uguaglianza fra polinomi:

$$\begin{gathered}29t^3 - 39t^2 - 37t - 1 \\ = A(t+1)t(t-2) + B(t+3)t(t-2) + C(t+3)(t+1)(t-2) + D(t+3)(t+1)t\end{gathered}$$

e si inseriscono valori speciali per t che azzerrano i polinomi di primo grado che appaiono nella fattorizzazione del denominatore:

$$\begin{aligned}t = -3 \rightsquigarrow -1024 &= 29(-3)^3 - 39(-3)^2 - 37(-3) - 1 \\ &= A(-3+1)(-3)(-3-2) + 0 + 0 + 0 \rightsquigarrow A = 1024/30 = 512/15 \\ t = -1 \rightsquigarrow -32 &= 29(-1)^3 - 39(-1)^2 - 37(-1) - 1 \\ &= 0 + B(-1+3)(-1)(-1-2) + 0 + 0 \rightsquigarrow B = -32/6 = -16/3 \\ t = 0 \rightsquigarrow -1 &= 29(0)^3 - 39(0)^2 - 37(0) - 1 \\ &= 0 + 0 + C(0+3)(0+1)(0-2) + 0 \rightsquigarrow C = 1/6 \\ t = 2 \rightsquigarrow 1 &= 29(2)^3 - 39(2)^2 - 37(2) - 1 \\ &= 0 + 0 + 0 + D(2+3)(2+1)(2) \rightsquigarrow D = 1/30\end{aligned}$$

Quinto passo: calcolare l'antiderivata.

$$\begin{aligned}\int \frac{(t-1)^5}{(t+3)(t+1)t(t-2)}\,dt &= \int t - 7 + \frac{512}{15}\frac{1}{t+3} - \frac{16}{3}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{t} + \frac{1}{30}\frac{1}{t-2}\,dt \\ &= \frac{t^2}{2} - 7t + \frac{512}{15}\log(t+3) - \frac{16}{3}\log(t+1) + \frac{1}{6}\log(t) + \frac{1}{30}\log(t-2)\end{aligned}$$