

DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 30 settembre 2025

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici*. È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad dx dy = r dr d\theta$$

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad dx dy dz = r dr d\theta dz$$

A. Calcolare

$$\int \frac{y^4}{(y^2 + 1)(y^2 + 4)} dy$$

B. Siano B e R parametri fissi, ambedue con valori positivi. Sia $\mathcal{S}$ il semidisco determinato dai vincoli:

$$x^2 + y^2 \leq R^2 \quad y \leq Bx$$

Schizzare un disegno di $\mathcal{S}$. Poi, usare le coordinate polari (r e θ) e calcolare $\bar{y}$, la media di y , su $\mathcal{S}$.

C. Siano A e R due parametri fissi con $0 < A < R$ e sia $\mathcal{C}$ la calotta determinata dai vincoli:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad \text{e} \quad z \geq A$$

Schizzare un disegno di $\mathcal{C}$. Sia E un altro parametro fisso. Usare le coordinate cilindriche per calcolare

$$\iiint_{\mathcal{C}} z^E dV$$

Convieni organizzare l'integrale triplo in modo che il primo integrale sia quello dr .

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} v + x + y + z &= 1 \\ v + 2x + 3y + 4z &= 2 \\ v + 3x + 6y + 10z &= 3 \\ v + 4x + 10y + 20z &= 3 \\ v + 5x + 15y + 35z &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{8}$$

A

$$\frac{y^4}{(y^2+1)(y^2+4)} \quad \leftarrow \text{grado} = 4$$

||

$$\leftarrow \text{grado} = 4$$

$$(y^2+1)(y^2+4) = y^4 + 5y^2 + 4$$

y^4	$y^4 + 5y^2 + 4$
$y^4 + 5y^2 + 4$	1
$-5y^2 - 4$	

$$y^4 = 1 \cdot (y^4 + 5y^2 + 4) + (-5y^2 - 4)$$

$$\frac{y^4}{y^4 + 5y^2 + 4} = 1 + \frac{(-5y^2 - 4)}{(y^4 + 5y^2 + 4)} \quad \leftarrow \text{grado} = 2$$

||

$$\leftarrow \text{grado} = 4$$

con $2 < 4$.

$$\frac{-5y^2 - 4}{(y^2+1)(y^2+4)} = \frac{-5z - 4}{(z+1)(z+4)} \quad \text{con } z = y^2$$

$$\frac{2}{8}$$

$$\frac{-5z-4}{(z+1)(z+4)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+4}$$

$$-5z-4 = A(z+4) + B(z+1)$$

$$z = -1 \rightsquigarrow -5(-1)-4 = A(-1+4) + 0$$

$$\hookrightarrow 1 = 3A \rightsquigarrow A = \frac{1}{3}$$

$$z = -4 \rightsquigarrow -5(-4)-4 = 0 + B(-4+1)$$

$$\hookrightarrow 16 = -3B \rightsquigarrow B = -16/3$$

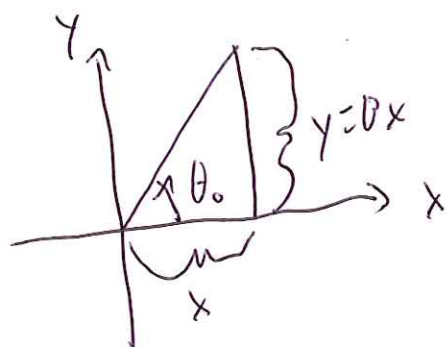
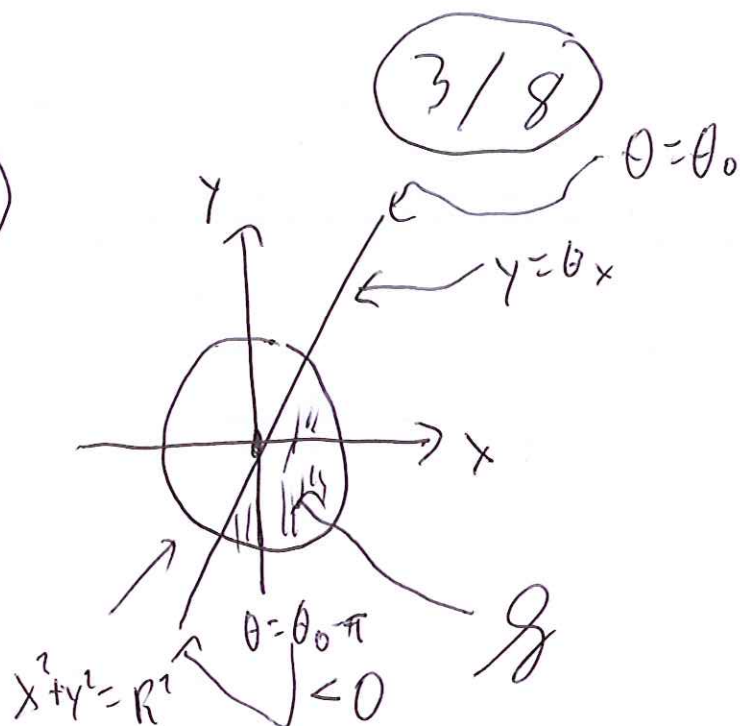
$$\frac{-5y^2-4}{(y^2+1)(y^2+4)} = \frac{1}{3} \frac{1}{y^2+1} - \frac{16}{3} \frac{1}{y^2+4}$$

$$\int \frac{y^4}{(y^2+1)(y^2+4)} dy = \int \left(y + \frac{1}{3} \frac{1}{y^2+1} - \frac{16}{3} \frac{1}{y^2+4} \right) dy$$

$$= y + \frac{1}{3} \arctan(y) - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$= \left(y + \frac{1}{3} \arctan(y) - \frac{8}{3} \arctan\left(\frac{y}{2}\right) \right)$$

(B)



$$\cos \theta_0 = \frac{OP}{AO} = \frac{Bx}{x} = B$$

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{\sec \theta_0} = \frac{1}{\sqrt{1+B^2}}$$

$$= 1/\sqrt{1+B^2}$$

oppure $y = Bx \rightarrow r \cos \theta_0 = B r \cos \theta_0$

$\rightarrow \cos \theta_0 = B \cos \theta_0$

$\rightarrow \cos \theta_0 = \cos \theta_0 / \cos \theta_0 = B$

$$\iint_S 1 \, dA = \frac{1}{2} \pi R^2 \quad (\text{metà dell'area del disco})$$

$$\iint_S y \, dA = \int_{\theta=\theta_0-\pi}^{\theta_0} \left(\int_{r=0}^R (r \cos \theta) r \, dr \right) d\theta$$

4/8

$$= \int_{n=0}^R n^2 \left(\int_{\theta=\theta_0-\pi}^{\theta_0} \cos \theta \, d\theta \right) dn$$

$$= \int_{n=0}^R n^2 \left[-\cos \theta \right]_{\theta=\theta_0-\pi}^{\theta_0} dn$$

$$= \int_{n=0}^R n^2 [-2 \cos \theta_0] dn$$

(puisque $\cos(\theta_0 - \pi) = -\cos(\theta_0)$)

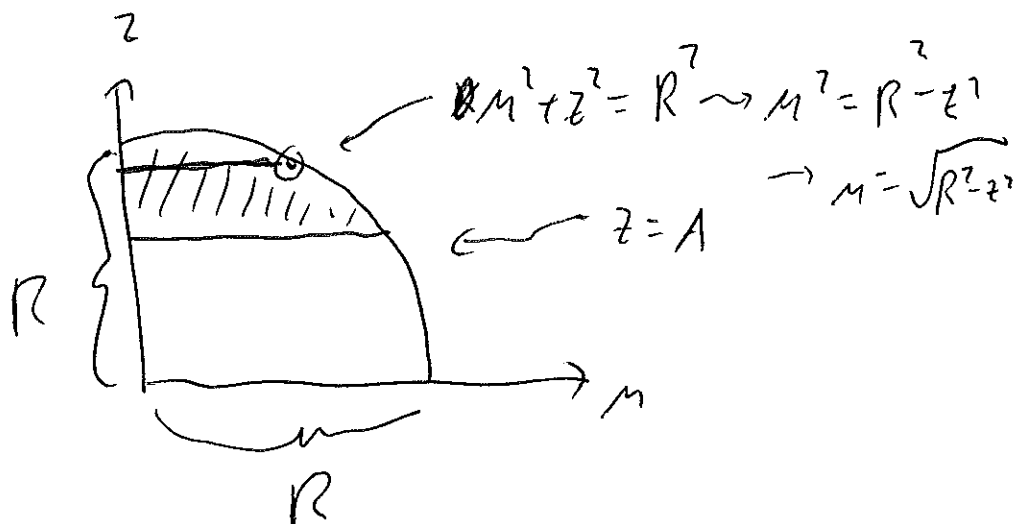
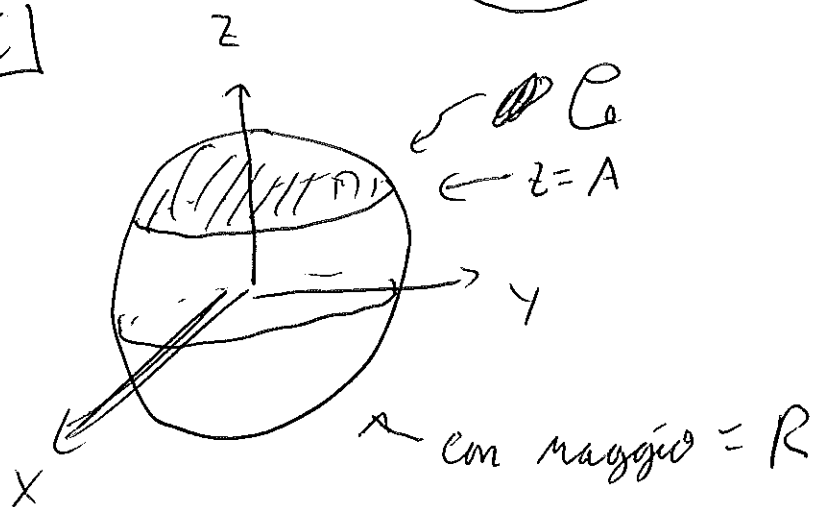
$$= -2 \int_{n=0}^R n^2 \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} dn$$

$$= -\frac{2}{3} R^3 \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$\overline{y} = \frac{-\frac{2}{3} R^3 \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}}{\frac{1}{2} \pi R^2} = -\frac{4}{3\pi} R \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

5/8

C



$$0 \leq m \leq \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$A \leq z \leq R$$

$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$\iiint_C z^E dV$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{z=A}^R \left(\int_{m=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} z^E m dm \right) dz \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_{z=A}^R z^E \left[\frac{m^2}{2} \right]_{m=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} dz$$

6/8

$$= \pi \int_{z=A}^R z^E (R^2 - z^2) dz$$

$$= \pi \left[\frac{R^2 z^{E+1}}{E+1} - \frac{z^{E+3}}{E+3} \right]_{z=A}^R$$

$$= \pi \left[\frac{R^{E+3}}{E+1} - \frac{R^{E+3}}{E+3} - R^2 \frac{A^{E+1}}{E+1} + \frac{A^{E+3}}{E+3} \right]$$

$$= \frac{\pi}{(E+1)(E+3)} \left[R^{E+3} (E+3) - R^{E+3} (E+1) - R^2 A^{E+1} (E+3) + A^{E+3} (E+1) \right]$$

$$= \frac{\pi}{(E+1)(E+3)} \left[2 R^{E+3} - (E+3) R^2 A^{E+1} + A^{E+3} (E+1) \right]$$

7/8

D

V	x	y	z	=
①	1	1	1	1
1	2	3	4	2
1	3	6	10	3
1	4	10	20	3
1	5	15	35	1

$E2 \leftarrow E2 - E1$
 $E3 \leftarrow E3 - E1$
 $E4 \leftarrow E4 - E1$
 $E5 \leftarrow E5 - E1$

①	1	1	1	1
0	①	2	3	1
0	2	7	9	2
0	3	9	19	2
0	4	14	34	0

$E1 \leftarrow E1 - E2$
 $E3 \leftarrow E3 - 2E2$
 $E4 \leftarrow E4 - 3E2$
 $E5 \leftarrow E5 - 4E2$

①	0	-1	-2	0
0	①	2	3	1
0	0	①	3	0
0	0	3	10	-1
0	0	6	22	-4

$E1 \leftarrow E1 + E3$
 $E2 \leftarrow E2 - 2E3$
 $E4 \leftarrow E4 - 3E3$
 $E5 \leftarrow E5 - 6E3$

①	0	0	1	0
0	①	0	-3	1
0	0	①	3	0
0	0	0	①	-1
0	0	0	4	-4

8/8

$$E1 \leftarrow E1 - E4$$

$$E2 \leftarrow E2 + 3E4$$

$$\xrightarrow{E3 \leftarrow E3 - 3E4}$$

$$E5 \leftarrow E5 - 4E4$$

v	x	y	z	=
(1)	0	0	0	1
0	(1)	0	0	-2
0	0	(1)	0	3
0	0	0	(1)	-1
0	0	0	0	0

$\hookrightarrow$ $v=1$
 $x=-2$
 $y=3$
 $z=-1$
 $e \text{ } \cancel{0 \neq 0}$
 $\nearrow$

Controlli:

$$v + x + y + z = 1 - 2 + 3 - 1 = 1 \text{ (✓)}$$

$$v + 2x + 3y + 4z = 1 - 4 + 9 - 4 = 2 \text{ (✓)}$$

$$v + 3x + 6y + 10z = 1 - 6 + 18 - 10 = 3 \text{ (✓)}$$

$$v + 4x + 10y + 20z = 1 - 8 + 30 - 20 = 3 \text{ (✓)}$$

$$v + 5x + 15y + 35z = 1 - 10 + 45 - 35 = 1 \text{ (✓)}$$

vero e basta,
 dunque da
 deppennane