

## Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

### Prova Scritta di 19 gennaio 2025

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici*. È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad dx \, dy = r \, dr \, d\theta$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \\ dx \, dy \, dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

A. Calcolare

$$\int \frac{y^4}{(y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1)} \, dy$$

B. Usare le coordinate polari e calcolare:

$$\iint_{x,y \geq 0} e^{(-x^2 - y^2)/2} \, dA$$

C. Siano  $A$  e  $R$  due parametri fissi con  $0 < A < R$  e sia  $\mathcal{C}$  la calotta determinata dai vincoli:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad \text{e} \quad z \geq A$$

Sia  $E$  un altro parametro fisso. Usare le coordinate sferiche per calcolare

$$\iiint_{\mathcal{C}} z^E dV$$

ma prima schizzare una sezione di  $\mathcal{C}$  che corrisponde ad un valore (qualsiasi) fisso di  $\phi$ . Conviene organizzare l'integrale triplo in modo che il primo integrale sia quello  $dr$ .

D. Usare il metodo di Gauss-Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} p + q + r + s &= -8 \\ p + 2q + 3r + 4s &= -1 \\ p + 3q + 6r + 10s &= 0 \\ p + 4q + 10r + 20s &= 1 \\ p + 5q + 15r + 35s &= 8 \\ p + 6q + 21r + 56s &= 27 \end{aligned}$$

(Indicazione: Se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, non saranno necessari denominatori.)

p. 1 / 8

A

$$\int \frac{y^4}{(y^2+y+1)(y^2-y+1)} dy$$

(grado=4)  
(grado=4)

$$\begin{aligned}(y^2+y+1)(y^2-y+1) &= (y^2+1+y)(y^2+1-y) \\ &= (y^2+1)^2 - y^2 = y^4 + 2y^2 + 1 - y^2 = y^4 + y^2 + 1\end{aligned}$$

~~$$\frac{y^4 + y^2 + 1}{y^4 + y^2 + 1}$$~~

$$\begin{array}{r|l} y^4 & y^4 + y^2 + 1 \\ \hline y^4 + y^2 + 1 & 1 \\ \hline -y^2 - 1 & \end{array}$$

$$y^4 = (y^4 + y^2 + 1) - y^2 - 1$$

$$\frac{y^4}{y^4 + y^2 + 1} = 1 + \frac{-y^2 - 1}{y^4 + y^2 + 1} = 1 + \frac{-y^2 - 1}{(y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1)}$$

$$\frac{-y^2 - 1}{(y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1)} = \frac{A}{y^2 + y + 1} + \frac{B(2y + 1)}{y^2 + y + 1} + \frac{C}{y^2 - y + 1} + \frac{D(2y - 1)}{y^2 - y + 1}$$

$$\begin{aligned}-y^2 - 1 &= A(y^2 - y + 1) + B(2y + 1)(y^2 - y + 1) \\ &\quad + C(y^2 + y + 1) + D(2y - 1)(y^2 + y + 1)\end{aligned}$$

P. 2 / 8

$$\begin{aligned} &= A(y^2 - y + 1) = (2B + 2D)y^3 \\ &+ B(2y^3 - y^2 + y + 1) + (A - B + C + D)y^2 \\ &+ C(y^2 + y + 1) + (-A + B + C + D)y \\ &+ D(2y^3 + y^2 + y - 1) + (A + B + C - D) \end{aligned}$$

$$(2B + 2D = 0) \leadsto D = -B$$

$$\left. \begin{aligned} A - B + C + D &= -1 \\ -A + B + C + D &= 0 \\ A + B + C + D &= -1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A - 2B + C &= -1 \\ -A + 2B + C &= 0 \\ A + C &= -1 \end{aligned}$$
$$\hookrightarrow C = -A - 1$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow (-2B - 1 = -1) \leadsto B = 0 \\ &-2A + 2B - 1 = 0 \leadsto A = -1/2 \end{aligned}$$

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0, \quad C = -1/2, \quad D = 0$$

$$\int \frac{y^4}{(y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1)} dy = \int 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{y^2 + y + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y^2 - y + 1} dy$$

$$\begin{aligned} &= y - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= y - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

p. 3/8

$$\textcircled{B} \quad \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2/2} t \, dt$$

$$\begin{aligned} u &= t^2/2 \\ du &= t \, dt \end{aligned} \quad = \quad \int_{u=0}^{+\infty} e^{-u} \, du$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -e^{-u} \right]_{u=0}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-R})$$

$$= 1$$

↑

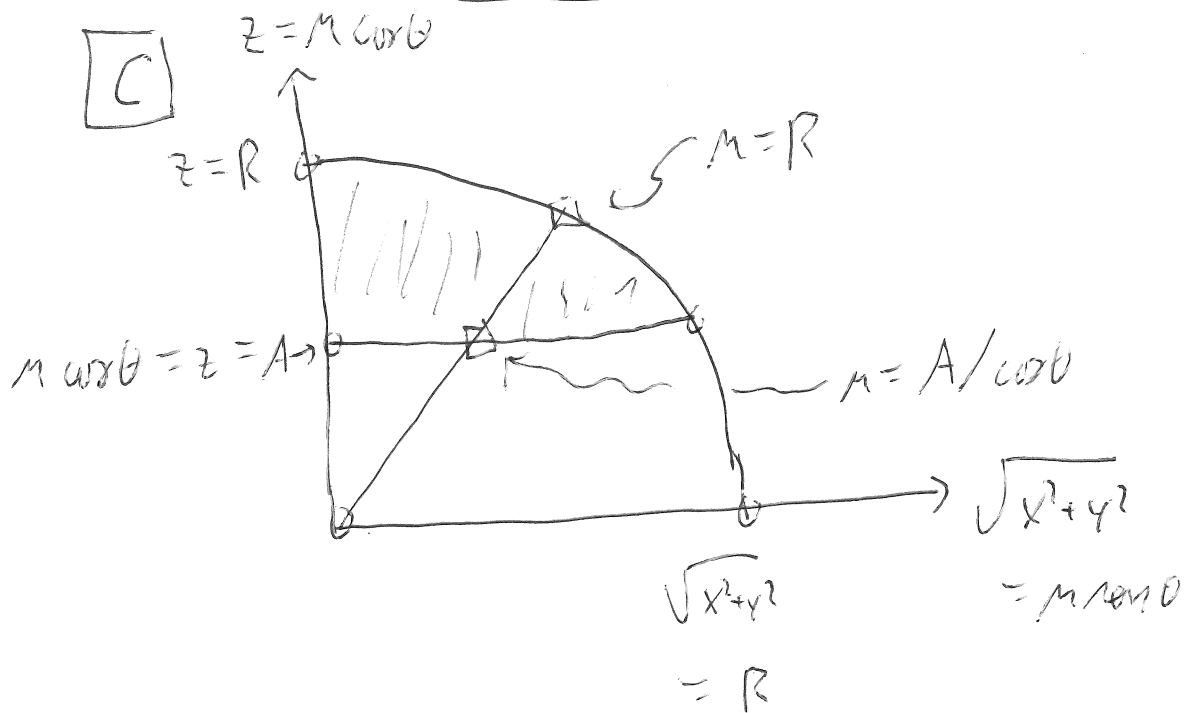
$$x, y \geq 0 \rightarrow r \cos \theta, r \sin \theta \geq 0 \rightarrow \cos \theta, \sin \theta \geq 0$$

$$\rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

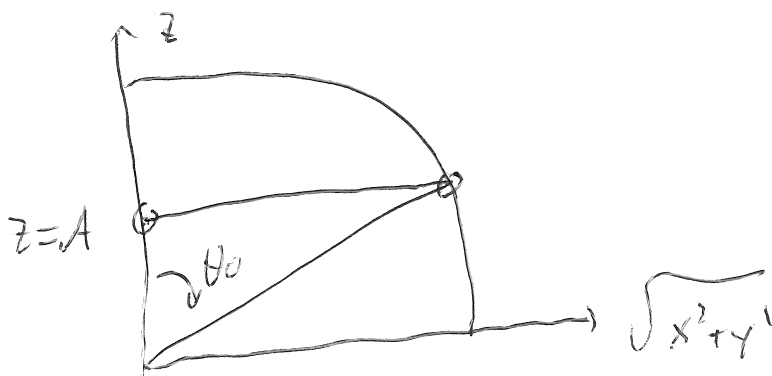
$$\iint_{x,y \geq 0} e^{-(x^2+y^2)/2} \, dA = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left( \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2/2} r \, dr \right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

p. 4/8



$$\frac{A}{\cos \theta} \leq M \leq R$$



$$\cos \theta_0 = \frac{AD}{RP} = \frac{A}{R}$$

$$0 \leq \theta \leq \theta_0$$

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi$$

P. 5/8

$$\iiint_C z^E dV$$

$$= \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \left( \int_{\theta=0}^{\theta_0} \left( \int_{r=A/\cos\theta}^R (r \cos\theta)^E r^2 \sin\theta dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta_0} (\cos\theta)^E \sin\theta \left( \int_{r=A/\cos\theta}^R r^{E+2} dr \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta_0} (\cos\theta)^E \sin\theta \cdot \frac{1}{E+3} \left( R^{E+3} - \left( \frac{A}{\cos\theta} \right)^{E+3} \right) d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{E+3} \int_{\theta=0}^{\theta_0} (\cos\theta)^E \sin\theta \cdot R^{E+3} - (\cos\theta)^{-3} \sin\theta \cdot A^{E+3} d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{E+3} \left[ -\frac{(\cos\theta)^{E+1}}{E+1} \cdot R^{E+3} + \frac{(\cos\theta)^{-2}}{-2} A^{E+3} \right]_{\theta=0}^{\theta_0}$$

$$= \frac{2\pi}{E+3} \left[ -\frac{R^{E+3}}{E+1} (\cos\theta_0)^{E+1} + \frac{A^{E+3}}{2} (\cos\theta_0)^{-2} + \frac{R^{E+3}}{E+1} + \frac{A^{E+3}}{2} \right]$$

p. 6/8

$$= \frac{2\pi}{E+3} \left[ -\frac{R^{E+3}}{E+1} \left(\frac{A}{R}\right)^{E+1} - \frac{A^{E+3}}{2} \left(\frac{R}{A}\right)^2 + \frac{R^{E+3}}{E+1} + \frac{A^{E+3}}{2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{E+3} \left[ -\frac{2R^2 A^{E+1}}{E+1} - R^2 A^{E+1} + \frac{2R^{E+3}}{E+1} + A^{E+3} \right]$$

$$= \frac{\pi}{E+3} \left[ \frac{2R^{E+3}}{E+1} - \frac{E+3}{E+1} R^2 A^{E+1} + A^{E+3} \right]$$

$$= \pi \left[ \frac{2R^{E+3}}{(E+1)(E+3)} - \frac{R^2 A^{E+1}}{E+1} + \frac{A^{E+3}}{E+3} \right]$$

[D]

| p | q | m  | s  | = cost. |
|---|---|----|----|---------|
| ① | 1 | 1  | 1  | -8      |
| 1 | 2 | 3  | 4  | -1      |
| 1 | 3 | 6  | 10 | 0       |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 1       |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 6       |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 27      |

P- 7/8

|                |   |   |    |    |    |
|----------------|---|---|----|----|----|
| $E2 + E2 - E1$ | ① | 1 | 1  | 1  | -8 |
| $E3 + E3 - E1$ | 0 | ① | 2  | 3  | 7  |
| $E4 + E4 - E1$ | 0 | 2 | 5  | 9  | 8  |
| $E5 + E5 - E1$ | 0 | 3 | 9  | 14 | 9  |
| $E6 + E6 - E1$ | 0 | 4 | 14 | 34 | 16 |
|                | 0 | 5 | 20 | 55 | 35 |

|                 |   |   |    |    |     |
|-----------------|---|---|----|----|-----|
| $E1 + E1 - E2$  | ① | 0 | -1 | -2 | -15 |
| $E3 + E3 - 2E2$ | 0 | ① | 2  | 3  | 7   |
| $E4 + E4 - 3E2$ | 0 | 0 | ①  | 3  | -6  |
| $E5 + E5 - 4E2$ | 0 | 0 | 3  | 10 | -12 |
| $E6 + E6 - 5E2$ | 0 | 0 | 6  | 22 | -12 |
|                 | 0 | 0 | 10 | 40 | 0   |

|                  |   |   |   |    |     |
|------------------|---|---|---|----|-----|
| $E1 + E1 + E3$   | ① | 0 | 0 | 1  | -21 |
| $E2 + E2 - 2E3$  | 0 | ① | 0 | -3 | 14  |
| $E4 + E4 - 3E3$  | 0 | 0 | ① | 3  | -6  |
| $E5 + E5 - 6E3$  | 0 | 0 | 0 | ①  | 6   |
| $E6 + E6 - 10E3$ | 0 | 0 | 0 | 4  | 24  |
|                  | 0 | 0 | 0 | 10 | 60  |

|                  | P | Q | M | S | = cost. |
|------------------|---|---|---|---|---------|
| $E1 + E1 - E4$   | ① | 0 | 0 | 0 | -27     |
| $E2 + E2 + 3E4$  | 0 | ① | 0 | 0 | 37      |
| $E3 + E3 - 3E4$  | 0 | 0 | ① | 0 | -24     |
| $E5 + E5 - 4E4$  | 0 | 0 | 0 | ① | 6       |
| $E6 + E6 - 10E4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0       |
|                  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0       |

P. 9/8

$$p = -27$$

$$q = 37$$

$$m = -24$$

$$s = 6$$

Controlli:

$$p + q + m + s = -27 + 37 - 24 + 6 = -8 \quad (\checkmark)$$

$$p + 2q + 3m + 4s = -27 + 74 - 72 + 24 = -1 \quad (\checkmark)$$

$$p + 3q + 4m + 5s = -27 + 111 - 96 + 30 = 0 \quad (\checkmark)$$

$$p + 4q + 5m + 6s = -27 + 148 - 120 + 36 = 1 \quad (\checkmark)$$

$$p + 5q + 6m + 7s = -27 + 185 - 144 + 42 = 8 \quad (\checkmark)$$

$$p + 6q + 7m + 8s = -27 + 222 - 168 + 48 = 7 \quad (\checkmark)$$

$$= -27 + 222 - 168 + 48 = 7 \quad (\checkmark)$$